Curriculum Vitæ di

Andrea Bonfiglioli

Contenuti:

Sinopsi dei dati e dei titoli:

Studio e posizioni	Data di nascita	**17/05/1974** (Bologna)
	Laurea	**17/07/1998** (Laurea in Matematica, Bologna)
	Dottorato	**20/04/2003** (Dottorato in Matematica, Bologna)
	Assegni di ricerca	**1/11/2002–31/10/2006** (Dip. Matem., Bologna)
	Ricercatore	**01/11/2006–14/09/2014** (Fac. Scienze, Unibo)
	Prof. Associato	**15/09/2014–oggi** (Scuola di Scienze, Unibo)
Pubblicazioni	Su riviste	**44**
	Monografie	**3**
	Seminari a stampa	**6**
	Curatele	**2**
	Divulgazione	**4**
Bibliometria	N.ro pubblicazioni	**46** (SCOPUS); **52** (WOS); **52** (MathSciNet)
	N.ro citazioni	**309** (SCOPUS); **275** (WOS); **593** (MathSciNet)
	h index	**9** (SCOPUS); **10** (WOS)
Talks	Su invito	**6** (in Italia o all'estero)
	Dipartimentali	**8** (a Bologna o in altro Ateneo)
	Divulgazione	**3**
Progetti di Ricerca	Responsabile	**3** prog.: • Progetto G.N.A.M.P.A. 2012; • Senior Fellowship I.S.A. Unibo 2013/14; • Giovani Ricercatori (Bologna) 2000
	Partecipante	**11** progetti (RFO; PRIN; altri progetti)
Didattica	Esercitazioni	per **23** insegnamenti
	Insegnamenti/moduli	titolarità **29** insegnamenti
	Dottorato/Master	**99** ore (Dottorato o Alta Formazione)
Tesi assegnate	Laurea	**10** (5 Lauree triennali; 5 Lauree magistrali)
	Dottorato	**2**
Altri titoli	Revisore V.Q.R.	Revisore esperto peer review V.Q.R. 2011-2014
	Referee	per 11 riviste internazionali
	Abilitazioni	• Classe A047 - Matematica nelle Scuole Secondarie (ottobre 2000) • Abilit. Scientif. Nazionale - II Fascia - 01/A3 (novembre 2013) • Abilit. Scientif. Nazionale - I Fascia - 01/A3 (marzo 2017)
	Organizz. convegni	"Matematica, Arte e Tecnologia" (Bologna, 2000)
		"Geometric methods in PDE's" (INDAM Meeting 2013)
	Commissioni	Commissario T.F.A. Classe A047 Matematica
	Commiss. Dipartim.	Membro Quality Assurance (CdS Matem. - Unibo)
		Commissione Orientamento (Dip. Matem. - Unibo)
		Commissione Didattica (CdS Matem. - Unibo)
	Collegio di Dottorato	dal 01/10/2016 (Bologna)
	Collaborazioni	Casa Editrice Zanichelli
		Piano Lauree Scientifiche (MIUR)
		C.E.U.R. ("Centro Europeo Università e Ricerca")

Vita e Studi:

- Sono nato a Bologna il 17/05/1974 e risiedo a Zola Predosa (Bologna). Mi sono diplomato presso il Liceo Scientifico "Leonardo da Vinci" di Casalecchio di Reno (Bologna) nell'Anno Scolastico 1992-93 con voto finale di 60 su 60.

- Ho conseguito la Laurea in Matematica, indirizzo Generale, presso la Facoltà di Scienze MM. FF. NN. dell'Università di Bologna, il 17/07/1998, con votazione finale 110/110 e Lode, discutendo una tesi dal titolo *"Alcune Equazioni di tipo Curvatura di Levi"* (relatore prof. E. Lanconelli).

- Ho prestato Servizio Civile Sostitutivo nel periodo 15-11-1999/14-09-2000, presso l'Università di Bologna (Segreteria Didattica e Scientifica del Dipartimento di Matematica).

- Nell'A.A. 1998-99 sono risultato vincitore del concorso per l'ammissione al XIV ciclo del Dottorato di Ricerca in Matematica, presso l'Università di Bologna.

- Nell'ottobre 2000 ho conseguito l'Abilitazione all'Insegnamento per la Classe di Concorso A047 – Matematica nelle Scuole Secondarie della Regione Emilia-Romagna, essendomi classificato ai primi posti della graduatoria per il Concorso Ordinario a Cattedre per Titoli ed Esami (2000). Dal 01/09/2000 al 31/10/2006 sono stato docente in ruolo (giuridico) per la cattedra di Matematica presso l'Istituto Superiore I.P.S.S.A.R. di Castel S. Pietro Terme (Bologna). In tale periodo, sono stato in congedo da tale docenza per motivi di studio (Dottorato ed Assegno di Ricerca, vedi sotto).

- Nel periodo marzo 2003 - maggio 2003 ho seguito il Corso di Formazione per Docenti Neo-Assunti (40 ore), obbligo istituzionale per la titolarità della cattedra in Matematica di cui sopra.

- Ho conseguito il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica presso l'Università di Bologna il 29/04/2003 (XIV ciclo), discutendo una tesi dal titolo *"Operatori Differenziali del Secondo Ordine sui Gruppi di Lie Stratificati"* (relatore prof. E. Lanconelli).

- Dal 1/11/2002 al 31/10/2006 sono stato Assegnista di Ricerca in Matematica presso l'Università di Bologna nell'ambito di un progetto di ricerca dal titolo *"Equazioni sub-Ellittiche sui Gruppi di Lie Omogenei"* (referente prof. E. Lanconelli).

- Dal 01/11/2006 al 14/09/2014 sono stato Ricercatore in Matematica presso la Facoltà di Scienze MM. FF. NN. dell'Università di Bologna nel settore disciplinare MAT/05 Analisi Matematica. Dal 01/11/2009 al 14/09/2014 sono stato Ricercatore Confermato.

- 21/11/2013: Ho conseguito l'Abilitazione Scientifica Nazionale (Tornata 2012 indetta con D.D. n.222 del 20/7/2012; G.U. n.58 del 27/7/2012) a Professore Associato (Seconda Fascia), nelle Università italiane (Settore Concorsuale 01/A3: Analisi Matematica, Probabilità e Statistica Matematica).[1]

- 15/09/2014: Ho preso servizio come Professore Associato (Seconda Fascia) in Analisi Matematica (Settore Concorsuale 01/A3: Analisi Matematica, Probabilità e Statistica Matematica) presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna (sede di servizio: Bologna).

- marzo 2017: Ho conseguito l'Abilitazione Scientifica Nazionale (Tornata 2016 indetta con D.D. n.1532 del 29/07/2016) a Professore Ordinario (Prima Fascia), nelle Università italiane (Settore Concorsuale 01/A3: Analisi Matematica, Probabilità e Statistica Matematica).

[1] Abilitazione conseguita ai sensi dell'art. 16 della legge 240/2010.

Altre informazioni relative al percorso scientifico e professionale:

- Nell'A.A. 1999/2000 ho collaborato all'organizzazione dell'evento "Matematica Arte e Tecnologia - da Escher alla Computer Graphics", organizzato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, in occasione del "World Mathematical Year 2000". Ho collaborato all'allestimento della relativa mostra (Bologna, 12 ottobre-31 dicembre 2000), curandone altresì il catalogo.

- Da settembre 2010 a maggio 2012 ho collaborato con la Casa Editrice Zanichelli di Bologna come editor e revisore nel Progetto "MATutor" (per la realizzazione di materiale editoriale e strumenti multimediali per lo studio della Matematica nella Scuola Secondaria Superiore), e sono stato tra i revisori e tra i realizzatori di testi ed esercizi per il libro di testo "MATutor per la quinta Liceo Scientifico" [M. Bergamini, G. Barozzi; Zanichelli, Bologna (2012)].

- Dall'A.A. 2012/2013 partecipo al "Piano nazionale Lauree Scientifiche" (P.L.S.) del M.I.U.R. (per l'orientamento e la formazione degli insegnanti), classe di Matematica, presso il Dipartimento di Matematica di Bologna e sono stato responsabile di un laboratorio attivato per gli A.A. 2012/13, 2013/14, 2014/15 e 2015/16. In marzo 2014 ho tenuto un Corso di Formazione per docenti di Scuola Secondaria legato alle attività del P.L.S. presso il Liceo "A. Righi" di Bologna (12 ore di attività seminariale di formazione), finanziato dall'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia Romagna. Relativamente al P.L.S. nell'A.A. 2014/15 ho tenuto un corso di 10 ore presso il Liceo Classico "E. Torricelli" di Faenza su "Infinito in Matematica"; nello stesso ambito, nell'A.A. 2015/16 ho tenuto un seminario dal titolo "L'Infinito in Matematica: suggestioni e misconcezioni", nell'ambito delle Conferenze MATHESIS, Bergamo (06/05/2016, Liceo Lussana).

- Dall'A.A. 2012/13 al 2014/15 sono stato membro della Commissione Didattica del Dipartimento di Matematica di Bologna. Dall'A.A. 2010/11 al 2012/13 sono stato membro della "Commissione per l'Orientamento" dei Corsi di Laurea in Matematica di Bologna. Dall'A.A. 2011/2012 al 2015/16 sono stato responsabile delle Giornate dell'Orientamento (AlmaOrienta) per i CdS Triennale e Magistrale in Matematica di Bologna. Dall'A.A. 2012/2013 al 2015/16 sono stato membro del Gruppo QA (Quality Assurance) dei CdS Triennale e Magistrale in Matematica di Bologna. In questi A.A., ho fatto parte del gruppo di lavoro che gestisce lo "Orientamento in Itinere" per gli studenti dei CdS in Matematica. Si veda pag. 19 per più dettagli su questa voce.

- Per tredici Anni Accademici (a partire dal 1999/2000) ho svolto una collaborazione con C.E.U.R. ("Centro Europeo Università e Ricerca") per il Tutorato in Analisi Matematica presso la Residenza Universitaria di Eccellenza "Camplus – Alma Mater" di Bologna.

- Da giugno 2008 a settembre 2010 ho svolto un'attività di sostegno presso l'Istituto per non vedenti "F. Cavazza" di Bologna, per la didattica speciale della Matematica in presenza di diversa-abilità visiva.

- Ho pubblicato con Springer-Verlag due monografie (XXVI+800 pagine; XLV+539 pagine) nelle collane *Springer Monographs in Mathematics* e *Lecture Notes in Mathematics*: si vedano i riferimenti [20] e [28] nell'elenco delle pubblicazioni.

- Dal 1/12/2018 al 29/12/2018 sono stato collocato in aspettativa per motivi di salute (infortunio sportivo); disposizione dirigenziale rep. 1100/19 Prot. 26742 del 14/2/2019.

- Sono stato Referee (anonimo) per riviste di rilevanza internazionale, tra cui:
  - Applicable Analysis;

- Computer Physics Communications;
- SCIENCE CHINA Mathematics;
- Potential Analysis;
- Calculus of Variations and PDE's;
- Mathematische Nachrichten;
- Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni;
- Communications in Contemporary Mathematics;
- Journal of Mathematical Analysis and Applications;
- Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications;
- Bulletin of the London Mathematical Society;
- Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2;
- Journal of Physics Communications;
- Linear and Multilinear Algebra.

- Nell'A.A. 2014/2015, sono stato membro della Commissione per il Concorso per l'accesso al Corso di T.F.A. (Tirocinio Formativo Attivo), Classe A047 Matematica (Università di Bologna).
- Sono stato revisore esperto per la peer review dei prodotti della ricerca sottomessi per la V.Q.R. 2011-2014.
- A partire dal 1 ottobre 2016, sono membro del Collegio dei Docenti del Dottorato in Matematica di Bologna (nomina del Consiglio di Dipartimento del 10/3/2016): cicli XXXII e XXXIII di Dottorato.

Elenchi delle Pubblicazioni Scientifiche

Di seguito si trovano elencate le seguenti pubblicazioni:

(A). Pubblicazioni scientifiche edite su riviste a carattere internazionale o collane.

(B). Seminari dipartimentali.

(C). Pubblicazioni scientifiche a carattere divulgativo.

(D). Lavori sottoposti per la pubblicazione, preprints, in preparazione.

Pubblicazioni su riviste internazionali	44
Pubblicazioni su riviste italiane	3
Monografie	3
Curatele	2
Seminari (editi)	6
Divulgazione	4
Submitted	4
In preparazione	2

(A). Pubblicazioni scientifiche edite (tranne seminari)

1. *Liouville-type theorems for real sub-Laplacians* (con E. Lanconelli), **Manuscripta Math.** 105, 111–124 (2001).

2. *Expansion of the Heisenberg integral mean via iterated Kohn Laplacians: a Pizzetti-type formula*, **Potential Anal.** 17, 165–180 (2002).

3. *Maximum Principle on unbounded domains for sub-Laplacians: a Potential Theory approach* (con E. Lanconelli), **Proc. Amer. Math. Soc.** 130, 2295–2304 (2002).

4. *Uniform Gaussian estimates of the fundamental solutions for heat operators on Carnot groups* (con E. Lanconelli, F. Uguzzoni), **Adv. Differential Equations** 7, 1153-1192 (2002).

5. *Subharmonic functions on Carnot groups* (con E. Lanconelli), **Math. Ann.** 325, 97–122 (2003).

6. *Levi's parametrix for some sub-elliptic non-divergence form operators* (con E. Lanconelli, F. Uguzzoni), **Electron. Res. Announc. Math. Sci.** 9, 10–18 (2003).

7. *Some non-existence results for critical equations on step-two stratified groups* (con F. Uguzzoni), **C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.** 336, 817–822 (2003).

8. *Nonlinear Liouville theorems for some critical problems on H-type groups* (con F. Uguzzoni), **J. Funct. Anal.** 207, 161–215 (2004).

9. *Homogeneous Carnot groups related to sets of vector fields*, **Bollettino U.M.I.** (8) 7-B, 79–107 (2004).

10. *Families of diffeomorphic sub-Laplacians and free Carnot groups* (con F. Uguzzoni), **Forum Math.** 16, 403–415 (2004).

11. *Fundamental solutions for non-divergence form operators on stratified groups* (con E. Lanconelli, F. Uguzzoni), **Trans. Amer. Math. Soc.** 356, 2709–2737 (2004).

12. *A note on lifting of Carnot groups* (con F. Uguzzoni), **Rev. Mat. Iberoamericana** 21, 1013–1035 (2005).

13. *A Poisson-Jensen type representation formula for subharmonic functions on stratified Lie groups* (con C. Cinti), **Potential Anal.** 22, 151–169 (2005).

14. *Representation formulas and Fatou-Kato theorems for heat operators on stratified groups* (con F. Uguzzoni) **Rendiconti di Matematica, Serie VII**, 25, 53–67 (2005).

15. *The theory of energy for sub-Laplacians with an application to quasi-continuity* (con C. Cinti) **Manuscripta Math.** 118, 283–309 (2005).

16. *Maximum principle and propagation for intrinsicly regular solutions of differential inequalities structured on vector fields* (con F. Uguzzoni) **J. Math. Anal. Appl.** 322, 886–900 (2006).

17. *Dirichlet problem with L^p-boundary data in contractible domains of Carnot groups* (con E. Lanconelli), **Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.** 5, 579–610 (2006).

18. *Harnack inequality for non-divergence form operators on stratified groups* (con F. Uguzzoni) **Trans. Amer. Math. Soc.** 359, 2463–2481 (2007).

19. *Gauge functions, Eikonal equations and Bôcher's theorem on stratified Lie groups* (con E. Lanconelli) **Calc. Var. Partial Differential Equations** 30, 277–291 (2007).

20. *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Monografia (ca. 800 pagine) (con E. Lanconelli, F. Uguzzoni), **Springer Monographs in Mathematics**, vol. XXVI. New York, NY: Springer-Verlag, 2007 (XXVI p. + 800 p.). ISSN: 1439-7382, ISBN-10 3-540-71896-6.

21. *Taylor formula for homogeneous groups and applications*, **Math. Z.** 262, 255–279 (2009).

22. *Pizzetti's formula for H-type groups*, **Potential Anal.** 31, 311–333 (2009).

23. *Lifting of convex functions on Carnot groups and lack of convexity for a gauge function*, **Arch. Math. (Basel)** 93, 277–286 (2009).

24. *On left invariant Hörmander operators in $\mathbb{R}^N$. Applications to Kolmogorov-Fokker-Planck equations* (con E. Lanconelli), **J. Math. Sci. (N. Y.)** 171, n.1, 22–33 (2010).

25. *On left-invariant Hörmander operators in $\mathbb{R}^N$: applications to the Kolmogorov-Fokker-Planck equations* (con E. Lanconelli), (Russian) **Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.** 36, 24–35 (2010).

26. *An ODE's version of the formula of Baker, Campbell, Dynkin and Hausdorff and the construction of Lie groups with prescribed Lie algebra*, **Mediterr. J. Math.** 7, 387–414 (2010).

27. *A new proof of the existence of free Lie algebras and an application* (con R. Fulci), **ISRN Algebra**, Volume 2011 (2011), Article ID 247403, 11 pages. doi:10.5402/2011/247403

28. *Topics in Noncommutative Algebra. The Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin.* (con R. Fulci), **Lecture Notes in Mathematics**, vol. 2034, Springer-Verlag, 2012 (XXII p.+ 498 p.).
ISBN 978-3-642-22596-3

29. *Lie groups related to Hörmander operators and Kolmogorov-Fokker-Planck equations* (con E. Lanconelli), **Commun. Pure Appl. Anal.** 11, 1587–1614 (2012).

30. *A new characterization of convexity in free Carnot groups* (con E. Lanconelli), **Proc. Amer. Math. Soc.** 140, 3263–3273 (2012).

31. *Matrix exponential groups and Kolmogorov-Fokker-Planck equations* (con E. Lanconelli), **J. Evol. Equ.** 12, 59–82 (2012)

32. *The early proofs of the Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin* (con R. Achilles), **Arch. Hist. Exact Sci.** 66, 295–358 (2012).

33. *On the Dirichlet problem and the inverse mean value theorem for a class of divergence form operators* (con B. Abbondanza), **J. London Math. Soc.** 87, 321–346 (2013). Doi: 10.1112/jlms/jds050.

34. *H-convex distributions in stratified groups* (con E. Lanconelli, V. Magnani, M. Scienza), **Proc. Amer. Math. Soc.** 141, 3633–3638 (2013).

35. *Subharmonic functions in sub-Riemannian settings* (con E. Lanconelli), **J. Eur. Math. Soc.** 15, 387–441 (2013); doi: 10.4171/JEMS/364.

36. *Convexity of average operators for subsolutions to subelliptic equations* (con E. Lanconelli, A. Tommasoli), **Anal. PDE**, 7-2, 345–373 (2014). Doi: 10.2140/apde.2014.7.345

37. *Normal families of functions for subelliptic operators and the theorems of Montel and Koebe* (con E. Battaglia), **J. Math. Anal. Appl.**, 409, 1–12 (2014).

38. *On the convergence of the Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin series in infinite-dimensional Banach-Lie algebras* (con S. Biagi), **Linear Multilinear Algebra**, 62, 1591–1615 (2014).

39. *A completeness result for time-dependent vector fields and applications* (con S.Biagi), **Commun. Contemp. Math.** 17, 1450040, 1–26 (2015).

40. *The q-deformed Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin Theorem* (con R. Achilles e J. Katriel), **Electron. Res. Announc. Math. Sci.** 22, 32–45 (2015).

41. A. Bonfiglioli, R. Fioresi, A. Parmeggiani (editori): *Topics in Mathematics*; edited by **U.M.I. Unione Matematica Italiana**: Bologna (English, 185 pages), 2015.

42. *The Role of Fundamental Solution in Potential and Regularity Theory for Subelliptic PDE* (con G. Citti Giovanna, G. Cupini, M. Manfredini, A. Montanari, D. Morbidelli, A. Pascucci, F. Uguzzoni, S. Polidoro); in: Geometric Methods in PDE (Cortona, 27–31 maggio 2013), **Springer I.N.D.A.M. series**, 341–373 (2015). ISSN: 2281-518X; ISBN: 978-3-319-02665-7

43. *The strong maximum principle and the Harnack inequality for a class of hypoelliptic non-Hörmander operators* (con E.Battaglia e S.Biagi), **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)** 66, 589–631 (2016).

44. *A Hadamard-type open map theorem for submersions and applications to completeness results in control theory* (con A. Montanari e D. Morbidelli), **Ann. Mat. Pura Appl.**, 195, 445–458 (2016).

45. *Weighted L^p-Liouville theorems for hypoelliptic partial differential operators on Lie groups* (with A.E.Kogoj), **J. Evol. Equ.**, 16, 569–585 (2016). doi:10.1007/s00028-015-0313-3

46. *Generating q-commutator identities and the q-BCH formula* (con J. Katriel), **Advances in Mathematical Physics**, Volume 2016, Article ID 9598409, 26 pages;

    http://dx.doi.org/10.1155/2016/9598409

47. *The existence of a global fundamental solution for homogeneous Hörmander operators via a global Lifting method* (with S. Biagi), **Proc. London Math. Soc.**, 114 (2017), 855–889.

48. *An invariant Harnack inequality for a class of subelliptic operators under global doubling and Poincaré assumptions, and applications* (with E. Battaglia), **J. Math. Anal. Appl.**, 460, 302–320, 2018.

49. *On the Baker-Campbell-Hausdorff Theorem: non-convergence and prolongation issues* (with. S. Biagi, M. Matone), to appear in **Linear Multilinear Algebra** (2019).

50. *An Introduction to the Geometrical Analysis of Vector Fields - with Applications to Maximum Principles and Lie Groups.* (with S. Biagi) World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2019. xxv+423 pp. ISBN: 978-981-3276-61-1

51. *Potential theory results for a class of PDOs admitting a global fundamental solution.* In: Analysis and partial differential equations: perspectives from developing countries, 65–83, **Springer Proc. Math. Stat.**, 275, Springer, Cham, 2019.

(B). Seminari dipartimentali (a stampa o rivista elettronica):[2]

52. *Gruppi di Carnot associati a campi vettoriali*, in: Seminario di Analisi Matematica, Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna; Anno Accademico 2001/2002, 27–46, Tecnoprint: Bologna (2002).

53. *Un teorema di Liouville non lineare sui semispazi dei gruppi di passo due*, in: Seminario di Analisi Matematica, Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna; Anno Accademico 2002/2003, 25–33, Tecnoprint: Bologna (2003).

54. *Gauge functions, eikonal equation and Bôcher theorem on stratified Lie groups* (con E. Lanconelli), in: Mathematical Analysis Seminar, University of Bologna Department of Mathematics: Academic Year 2005/2006 (Italian), 55–63, Tecnoprint: Bologna (2007).

55. *Taylor formula for homogeneous groups and applications*, in: "Bruno Pini" Mathematical Analysis Seminar: University of Bologna Department of Mathematics: Academic Year 2007/2008 (Italian), 43–69, Tecnoprint: Bologna (2008).

56. *The theorems of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin. History, proofs, open problems*, in: Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar 2010, 1–47, Bruno Pini Math. Anal. Semin., Univ. Bologna, Alma Mater Stud., Bologna, 2010.

57. *Algebras of complete Hörmander vector fields, and Lie-group construction* in: Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar 2014, 15–30, Bruno Pini Math. Anal. Semin., 2014, Univ. Bologna, Alma Mater Stud., Bologna, 2014.

(C). Pubblicazioni scientifiche a carattere divulgativo:

58. Bonfiglioli, A., Valentini, C. (editori): *Matematica Arte e Tecnologia: da Escher alla Computer Graphics*, Edizioni Aspasia, Bologna (2000).

[2] A stampa o su rivista elettronica (`http://mathematicalanalysis.unibo.it/`); dal 2007 anche indicizzati su Mathematical Reviews.

59. *"Matematica Arte e Tecnologia: da Escher alla Computer Graphics" Bologna, 12 ottobre - 3 dicembre 2000* (con C. Valentini), in "Matematica, Arte, Tecnologia, Cinema" Atti della Mostra e del Convegno, Bologna 2000, Springer Italia (2001).

60. *Mathematics meets Art: Escher, Reutersvärd and Saffaro at Bologna 2000* (con C. Valentini), in "Mathematics, Art, Technology, and Cinema" a cura di M. Emmer, Springer Verlag, 2003, 33—38.

61. *Analisi del Laboratorio P.L.S. "L'Infinito Matematico: Alcune Suggestioni"* (pp.374–378.), in: "L'insegnamento della matematica e delle scienze nella società della conoscenza. Il Piano Lauree Scientifiche (PLS) dopo 10 anni di attività" (Atti del Convegno Scientifico sul PLS; Napoli, Dicembre 2013). Casa Editrice Mondadori: collana "Mondadori Università" (2014). A cura di: G.Anzellotti, L.M.Catena, M.Catti, U.Cosentino, J.Immè, N.Vittorio. ISBN 978-88-6184-408-7.

62. *Alcune considerazioni e suggestioni sull'infinito in matematica*, in: "Parliamo tanto e spesso di didattica della matematica", Atti del Convegno "Incontri con la Matematica" n.28 (Castel S.Pietro Terme, novembre 2014); Collana: *Incontri con la Matematica*, a cura di B.D'Amore e S.Sbaragli, 2014. ISBN 88-371-1901-1

(D). Lavori sottoposti per la pubblicazione, preprints, in preparazione:

(i) *The contribution of Ernesto Pascal to the so-called Campbell-Hausdorff formula*, in preparation.

(ii) *A tool for Lie group construction* (con G. Spaletta), in preparation.

(iii) *Global Heat kernels for parabolic homogeneous Hörmander operators* (con S. Biagi) submitted, 2018.

(iv) *Global estimates for the fundamental solution of homogeneous Hörmander sums of squares* (con S. Biagi, M. Bramanti), submitted (2019). Preprint at arXiv:1906.07836v1 (2019).

(v) *Global estimates in Sobolev spaces for homogeneous Hörmander sums of squares*, (con S. Biagi, M. Bramanti), submitted (2019). Preprint at arXiv:1906.07835v1 (2019).

(vi) *Hörmander vector fields equipped with dilations: Lifting, Lie-group construction, applications*, submitted (2019).

Parametri Bibliometrici

(al 12/09/2016)

	SCOPUS	WOS Web of Science	MathSciNet
Documents	**46**	**52**	**52**
Citations	**309**	**275**	**593**
h-index	**9**	**10**	(non presente)

NOTA: La (notevole) differenza tra il numero di citazioni riportate da MathSciNet rispetto ai databases SCOPUS e WOS è dovuta al fatto che questi ultimi due databases (con una discutibile scelta di policy) non riportano in modo esaustivo i dati provenienti dai lavori monografici; nel mio caso mancano completamente i dati delle citazioni delle mie monografie per Springer-Verlag, nelle (ben note) Collane *Springer Monographs in Mathematics* e *Lecture Notes in Mathematics*.

Continuità nella produzione scientifica

(pubblicazioni a stampa: internazionali, nazionali o seminariali)

anno 20-	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n.ro pubbl.	**1**	**4**	**4**	**4**	**4**	**2**	**4**	**1**	**2**	**4**	**1**	**5**	**3**	**4**	**4**	**4**	**1**	**1**

Dati relativi alle pubblicazioni a stampa:
su rivista (nazionale o internazionale; pag. 6 e segg.) e seminariale (a stampa; pag. 9).

Attività didattica (presso l'Università di Bologna)

A partire dalll'A.A. 1998/99, ho prevalentemente svolto attività didattica (sia di supporto, sia con titolarità o responsabilità didattica) presso i Corsi di Studio in Matematica (Bologna) e Scienze Ambientali (Ravenna), e presso la Facoltà di Ingegneria (Bologna). [Sporadicamente anche per i C.d.S. in Chimica (Bologna), Scienze dell'Informazione (Cesena), Te.Co.Re. (Ravenna).] Ho tenuto alcuni corsi per il Dottorato in Matematica (Bologna) e per il Master in Alta Formazione in Finanza (Bologna).

Più precisamente, di seguito si trova il dettaglio della mia attività didattica universitaria.

A.A. 1998/1999:

Ciclo annuale di esercitazioni e partecipazione alla commissione d'esame per il corso di Istituzioni di Matematica 2, presso il corso di Laurea in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (titolare: prof.ssa Valeria Simoncini).

A.A. 1999/2000:

Corso di accoglienza per matricole per il corso di Istituzioni di Matematica presso il corso di Laurea in Chimica.

A.A. 2000/2001:

Corso di accoglienza per matricole per il corso di Istituzioni di Matematica presso il corso di Laurea in Chimica.

A.A. 2001/2002:

- Corso di accoglienza per matricole per il corso di Istituzioni di Matematica presso il corso di Laurea in Chimica.
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-A per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (titolare: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-B per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (titolare: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica 2 per il Corso di Laurea in Scienze dell'Informazione, sede di Cesena (titolare: prof.ssa Annamaria Montanari).
- Ciclo di dieci ore di didattica, finalizzata alla ricerca, per il Dottorato in Matematica (XVII Ciclo, Bologna) sul tema Introduzione ai Gruppi di Carnot.

A.A. 2002/2003:

- Corso di accoglienza per matricole per il corso di Istituzioni di Matematica presso il corso di Laurea in Chimica.
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-A per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (titolare: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-B per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (titolare: prof. Enrico Obrecht).

- Corso di Esercitazioni in Istituzioni di Matematica 1 per il Corso di Laurea in Scienze Ambientali, sede di Ravenna (titolare: prof.ssa Valeria Simoncini).

A.A. 2003/2004:

- Corso di accoglienza per matricole di Ingegneria dell'Università di Bologna.
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-A per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (titolare: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-B per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (titolare: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Istituzioni di Matematica 1 per il Corso di Laurea in Scienze Ambientali, sede di Ravenna (titolare: prof.ssa Valeria Simoncini).

A.A. 2004/2005:

- Corso di accoglienza per matricole di Ingegneria dell'Università di Bologna.
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-C per il Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica e delle Telecomunicazioni (titolare: prof. Enrico Obrecht).
- Ciclo di Seminari rivolti agli studenti del corso di Istituzioni di Matematica 1 per il Corso di Laurea in Scienze Ambientali, sede di Ravenna (titolare: prof.ssa Valeria Simoncini).
- Ciclo di dieci ore di lezione per il corso di Alta Formazione in Finanza Matematica - Università di Bologna (referenti: proff. Sergio Polidoro e Andrea Pascucci).

A.A. 2005/2006:

- Corso di accoglienza per matricole di Ingegneria dell'Università di Bologna (svoltosi dal 7/09/2005 al 20/09/2005).
- Ciclo di venti ore di lezione per il corso di Istituzioni di Matematica – Corso di Laurea in Chimica dell'Università di Bologna (titolare: prof.ssa Emanuela Caliceti).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-C per il Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica e delle Telecomunicazioni (titolare: prof. Enrico Obrecht).
- Ciclo di dieci ore di lezione per il corso di Alta Formazione in Finanza Matematica - Università di Bologna (referenti: proff. Sergio Polidoro e Andrea Pascucci).

A.A. 2006/2007:

- Ciclo di dieci ore di lezione per il corso di Istituzioni di Matematica – Corso di Laurea in Chimica dell'Università di Bologna (titolare: prof.ssa Emanuela Caliceti).
- Ciclo di dodici ore di lezione per il corso di Alta Formazione in Finanza Matematica - Università di Bologna (referenti: proff. Sergio Polidoro e Andrea Pascucci).
- Ciclo di 90 ore (due corsi di 45 ore ciascuno) per le Attività Professionalizzanti per il C.d.L. in Matematica, Bologna (Laurea Triennale): Approfondimenti di LaTeX.

A.A. 2007/2008:

- Titolarità dell'insegnamento Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità dell'insegnamento Fondamenti di Matematica, presso il C.d.S. in Tecnologia per la Conservazione ed il Restauro, Ravenna (4 crediti formativi, 32 ore di lezione).
- Ciclo di dodici ore di lezione per il corso di Alta Formazione in Finanza Matematica - Università di Bologna (referenti: proff. Sergio Polidoro e Andrea Pascucci).
- Titolarità dell'insegnamento Analisi Armonica, presso la Laurea Magistrale in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).
- Ciclo di 15 ore di lezione per il Corso di Dottorato in Matematica (Bologna), dal titolo "Analisi Armonica – Gruppi Stratificati e Teoria del Potenziale per i sub-Laplaciani".

A.A. 2008/2009:

- Titolarità dell'insegnamento Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità dell'insegnamento Analisi Armonica, presso la Laurea Magistrale in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).

A.A. 2009/2010:

- Titolarità dell'insegnamento Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità dell'insegnamento Analisi Armonica, presso la Laurea Magistrale in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).

A.A. 2010/2011:

- Titolarità dell'insegnamento Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Superiore 2, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore). Il corso è tenuto parallelamente (per ulteriori 24 ore di lezione) in lingua inglese, poiché rientra nel Progetto Europeo EU–US "Atlantis" (referente: prof.ssa Giovanna Citti).
- Insegnamento "Introduction to Stratified Lie Groups" per il Corso di Dottorato in Matematica, Università di Bologna (30 ore).

A.A. 2011/2012:

- Titolarità dell'insegnamento Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Superiore 2, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).

- Seminario dal titolo "Il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff; applicazioni alla costruzione di gruppi di Lie" nel ciclo Topics in Mathematics 2011/2012, per gli studenti di Dottorato in Matematica di Bologna (15 marzo 2012).

A.A. 2012/2013:

- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (4 crediti formativi, 32 ore di lezione).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Superiore 2, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).
- Attività didattica nell'insegnamento Analisi 2 (16/20 ore), Laurea Triennale in Matematica, Bologna (Titolare: Prof. E.Lanconelli).
- Attività didattica (10 ore) per Docenti di Scuole Secondarie Superiori (dell'Emilia Romagna) relativa al Piano nazionale Lauree Scientifiche (PLS) del M.I.U.R.; Laboratorio dal titolo "L'Infinito Matematico: Alcune suggestioni".

A.A. 2013/2014:

- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (4 crediti formativi, 32 ore).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Superiore 2, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Matematica T-1, presso il C.d.S. in Ingegneria Edile, Università di Bologna, Campus di Ravenna (3 crediti formativi, 30 ore).

A.A. 2014/2015:

- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (4 crediti formativi, 32 ore).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Geometrica, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).
- Titolarità dell'insegnamento Analisi 1, presso il C.d.S. in Ingegneria Edile-Architettura, Bologna (6 crediti formativi, 60 ore).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Matematica T-B (Modulo 2), presso il C.d.S. in Ingegneria Gestionale, Bologna (3 crediti formativi, 30 ore).

A.A. 2015/2016:

- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (4 crediti formativi, 32 ore).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Geometrica, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).
- Titolarità dell'insegnamento Analisi 1, presso il C.d.S. in Ingegneria Edile-Architettura, Bologna (6 crediti formativi, 60 ore).

- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Matematica T-2 (Modulo 2), per i C.d.S. in Ingegneria Chimica e Biochimica e Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni, Bologna (3 crediti formativi, 30 ore).
- Seminario "Mean Value Formulas for degenerate-elliptic PDOs: applications to Potential Theory" nel ciclo Topics in Mathematics 2015/2016, per gli studenti di Dottorato in Matematica di Bologna (16 marzo 2016 - seminario di 2 ore).

A.A. 2016/2017:

- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Mathematical Methods for Engineering (corso in inglese), presso la Laurea Magistrale in Aerospace Engineering, Università di Bologna, sede di Forlì (3 crediti formativi, 30 ore).
- Titolarità dell'insegnamento Analisi Matematica T, presso i C.d.S. in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'ambiente e il territorio, Bologna (9 crediti formativi, 90 ore).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Analisi Geometrica, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Complementi di Analisi Matematica ed Elementi di Calcolo delle Probabilità T (Modulo 2), per i C.d.S. in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'ambiente e il territorio, Bologna (3 crediti formativi, 30 ore).

A.A. 2017/2018:

- Titolarità di un modulo (Modulo 2) dell'insegnamento Mathematical Methods for Engineering (corso in inglese), presso la Laurea Magistrale in Aerospace Engineering, Università di Bologna, sede di Forlì (3 crediti formativi, 30 ore).
- Titolarità dell'insegnamento Analisi Matematica T, presso i C.d.S. in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, Bologna (9 crediti formativi, 90 ore).
- Titolarità dell'insegnamento Complementi di Analisi Matematica M, presso la Laurea Magistrale in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio e Ingegneria Chimica e di Processo, Bologna (4 crediti formativi, 32 ore).
- Titolarità di un modulo dell'insegnamento Complementi di Analisi Matematica ed Elementi di Calcolo delle Probabilità T (Modulo 2), per i C.d.S. in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, Bologna (3 crediti formativi, 30 ore).

A.A. 2018/2019:

- Titolarità di un modulo (Modulo 2) dell'insegnamento Mathematical Methods for Engineering (corso in inglese), presso la Laurea Magistrale in Aerospace Engineering, Università di Bologna, sede di Forlì (3 crediti formativi, 30 ore).
- Titolarità dell'insegnamento Analisi Matematica TB, presso il C.d.S. in Ingegneria Energetica, Bologna (6 crediti formativi, 60 ore).
- Titolarità dell'insegnamento Complementi di Analisi Matematica M, presso la Laurea Magistrale in Ingegneria Chimica e di Processo, Bologna (3 crediti formativi, 24 ore).

- Titolarità di un modulo del corso integrato Analisi Matematica M e Metodi Numerici per l'Ingegneria M, per la Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica, Bologna (3 crediti formativi, 30 ore).

Tesi di Laurea e di Dottorato assegnate:

1. Ho contribuito ad alcuni contenuti della tesi di dottorato "Sui sub-Laplaciani reali e su una classe di operatori ultraparabolici sui gruppi di Lie stratificati" della dott.ssa Chiara Cinti (XVII ciclo, Bologna), che hanno portato alle pubblicazioni [13] e [15].

2. Nell'A.A. 2011/2012 sono stato relatore della tesi di Laurea Magistrale in Matematica "La Soluzione Fondamentale per i Sub-Laplaciani sui Gruppi Nilpotenti di Passo Due" del dott. Andrea Tamagnini.

3. Nell'A.A. 2011/2012 sono stato relatore della tesi di Laurea Triennale in Matematica "Una dimostrazione algebrica del teorema di Campbell, Baker, Hausdorff" del dott. Mirko Ruffilli.

4. Nell'A.A. 2012/2013 sono stato relatore della tesi di Laurea Magistrale in Matematica "Famiglie Normali di Funzioni Armoniche per Operatori Subellittici" della dott.ssa Erika Battaglia. I contenuti principali della tesi sono stati pubblicati in [37].

5. Nell'A.A. 2012/2013 ho collaborato alla tesi di Dottorato in Matematica della dott.ssa Beatrice Abbondanza (XXVI Ciclo, Bologna). Alcuni contenuti sono stati pubblicati in [33].

6. Nell'A.A. 2012/2013 sono stato relatore della tesi di Laurea Triennale in Matematica "Dipendenza dai Dati per Equazioni Differenziali Ordinarie" del dott. Tommaso Zamagni.

7. Nell'A.A. 2013/2014 sono stato relatore della tesi di Laurea Triennale in Matematica dello studente Francesco di Fabio; tesi "Alcuni risultati sulla convergenza in misura".

8. Nell'A.A. 2013/2014 sono stato relatore della tesi di Laurea Triennale in Matematica dello studente Stefano Murtagh; tesi "Trasformata e antitrasformata di Fourier per funzioni sommabili e applicazioni".

9. Nell'A.A. 2013/2014 sono stato correlatore della tesi di Laurea Triennale in Matematica dello studente Righini Alberto; tesi "Funzioni a variazione limitata e funzioni assolutamente continue".

10. Nell'A.A. 2014/2015 sono stato relatore della tesi di Laurea Magistrale in Matematica del dott. Mirko Ruffilli; tesi "Stime Integrali su Gruppi di Tipo H e Principio Forte di Continuazione Unica".

11. Nell'A.A. 2014/2015 sono stato correlatore della tesi di Laurea Triennale in Matematica della studentessa Annachiara Bartolini; tesi "La teoria dei numeri transfiniti nei suoi aspetti matematici e filosofici".

12. Nell'A.A. 2015/2016 sono stato relatore della tesi di Laurea Magistrale in Matematica della studentessa Sara Chiappelli; tesi "Applicazione ai gruppi di Lie della prolungabilità per Equazioni Differenziali Ordinarie".

13. Nell'A.A. 2016/2017 sono stato relatore della tesi di Dottorato in Matematica del dott. Stefano Biagi (XXVII Ciclo, Bologna).

14. Nell'A.A. 2016/2017 sono stato relatore della tesi di Dottorato in Matematica della dott.ssa Erika Battaglia (XXVIII Ciclo, Bologna).

15. Nell'A.A. 2016/2017 sono stato relatore della tesi di Laurea Magistrale in Matematica della studentessa Stefania Perugini; tesi "Costruzione di gruppi di Lie con tecniche di Equazioni Differenziali Ordinarie".

Attività Scientifico-Didattica non Accademica:

• Per tredici Anni Accademici (dal 1999/2000 al 2009/10 e negli A.A. 2011/12 e 2014/15) ho svolto una collaborazione con C.E.U.R. ("Centro Europeo Università e Ricerca") per il Tutorato in Analisi Matematica per studenti di Ingegneria e Scienze MM.FF.NN. presso le Residenze Universitarie di Eccellenza (poi "Camplus") "Alma Mater" e "San Felice" di Bologna.

Questa duratura esperienza è stata per me di grande interesse sia didattico sia professionale poiché, potendo seguire studenti inquadrati in una struttura di "eccellenza", è stato per me possibile svolgere attività didattica con un gruppo di studenti che affrontano lo studio della Matematica con fortissima motivazione e interesse, soprattutto verso gli aspetti più formativi della Matematica, fondamentali per una futura esperienza lavorativa.

• Da giugno 2008 a settembre 2010 ho svolto un'attività volontaria di sostegno presso l'Istituto per non vedenti "F. Cavazza" di Bologna, per la didattica della Matematica in presenza di diversa-abilità visiva. Questa esperienza mi ha permesso di entrare in contatto con lo speciale apprendimento dell'Algebra e, in particolare, della Geometria, da parte dello studente con diversa-abilità visiva.

• Da settembre 2010 a maggio 2012 ho collaborato con la Casa Editrice Zanichelli di Bologna come editor e revisore nel Progetto "MATutor" (per la realizzazione di materiale editoriale e strumenti multimediali per lo studio della Matematica nella Scuola Secondaria Superiore), e sono tra i revisori e tra i realizzatori di testi ed esercizi per il libro "MATutor per la quinta Liceo Scientifico" [M. Bergamini, G. Barozzi, Zanichelli, Bologna (2012)].

Attività di Servizio Dipartimentale o d'Ateneo

Mi sono occupato delle seguenti attività di servizio presso il Dipartimento di Matematica di Bologna e per l'Ateneo di Bologna:

- *Negli A.A. 2010/11, 2011/12, 2012/13 sono stato membro della "Commissione per l'Orientamento" dei Corsi di Studio in Matematica di Bologna.* Durante questi tre anni accademici, nell'ambito dei lavori della Commissione per l'Orientamento, mi sono occupato delle seguenti attività:

  1. *Redazione degli annuali Rapporti di Riesame delle Lauree Triennale e Magistrale in Matematica di Bologna* (analisi dei dati su ingresso nel mondo universitario degli studenti dei due Corsi; regolarità degli studenti durante il loro percorso di studi; opinioni sulla didattica di laureandi e studenti; ingresso dei laureati nel mondo del lavoro; studenti con OFA; ecc...); la Commissione ha anche avuto il compito di elaborare strategie da proporre al Consiglio di C.d.S. per la risoluzione delle eventuali criticità sui dati di efficienza ed efficacia dei corsi. Alcune di queste strategie sono già state attuate, con incoraggianti risultati.
  2. *Redazione degli annuali rapporti sull'analisi delle schede relative alla rilevazione statistica della didattica per le Lauree Triennale e Magistrale in Matematica di Bologna* (analisi delle criticità e dei punti di forza emersi dalle schede di valutazione degli studenti); la Commissione ha anche avuto il compito di proporre al Consiglio di C.d.S. strategie atte al miglioramento della qualità (percepita dagli studenti) dell'offerta didattica dei vari insegnamenti.
  3. *Incontri periodici con gli studenti.* Tra le altre iniziative, si sono tenuti incontro di inizio d'anno con le matricole, per portare all'attenzione degli studenti le tipicità dello studio universitario della Matematica e per un corretto orientamento in entrata; durante gli incontri con gli studenti dei vari anni delle due Lauree in Matematica, sono state raccolte informazioni sulle criticità e sui punti di forza del CdS, soprattutto durante gli anni in cui si registra il maggior numero di abbandoni. Oltre ad un capillare lavoro di incontri con gli studenti, l'utilizzo dei cosiddetti *social-networks* (ad esempio, Facebook) si è rivelato un mezzo da non sottovalutare per una continua ed efficace comunicazione con una generazione di studenti ormai abituata ad utilizzare questi strumenti.
  4. *Incontri periodici con i Rappresentanti degli studenti.* Tra le altre iniziative, sono state commissionate ai Rappresentanti precise indagini (presso gli studenti), i cui risultati si sono rivelati di fondamentale utilità per comprendere le criticità e specificità del percorso di studi presso i C.d.S. in Matematica. Questa attività aumenta il grado di coesione tra Rappresentanti e studenti anche nei momenti in cui, per diversi fattori, possono operare scollamenti tra essi.
  5. *Incontri con gli studenti in debito O.F.A.* Soon stati discussi percorsi personalizzati per il recupero del debito O.F.A., nonché strategie per un corretto orientamento degli studenti in entrata, volto a far emergere le vere "vocazioni" (ad esempio, prosecuzione nel Piano Lauree Scientifiche ministeriale) e a scoraggiare gli studenti non in possesso dei requisiti richiesti in entrata (come emerge, ad esempio, da un'analisi dei dati delle scuole di provenienza e del voto di diploma).

- *Negli A.A. 2013/14, 2014/15, 2015/16 sono stato membro del Gruppo QA (Quality Assurance) dei C.d.S. Triennale e Magistrale in Matematica di Bologna.* Il Gruppo QA ha sostituito (in linea con le direttive d'Ateneo per l'assicurazione della qualità dell'offerta didattica), con mansioni analoghe, la precedente Commissione per l'Orientamento.

- *Negli A.A. dal 2011/2012 al 2015/16 sono stato responsabile delle Giornate dell'Orientamento ("AlmaOrienta") per i C.d.S. Triennale e Magistrale in Matematica dell'Ateneo di Bologna.* Mi sono occupato dell'organizzazione delle Giornate dell'Orientamento (evento "AlmaOrienta" dell'Ateneo di Bologna) per la pubblicizzazione delle Lauree in Matematica di Bologna, ai fini di un orientamento degli studenti immatricolandi.

- *Negli A.A. dal 2011/2012 al 2015/16 ho fatto parte del gruppo di lavoro che gestiva lo "Orientamento in Itinere" per gli studenti dei C.d.S. in Matematica.* Durante gli incontri (mensili) sono stati discussi in modo approfondito i disagi o le problematicità dei singoli studenti che si presentano ai colloqui, sono stati considerati potenziali percorsi post-lauream, ed elaborate strategie di soluzione nei casi di "calo vocazionale" verso lo studio e potenziale abbandono del percorso universitario.

- *Negli A.A. 2012/2013 e 2013/14 sono stato membro della Commissione Didattica del Dipartimento di Matematica di Bologna.* La Commissione Didattica istruisce tutte le pratiche relative alle diverse attività didattiche di competenza del Dipartimento (tra cui: il piano triennale della didattica; la delibera dei compiti didattici dei docenti; la delibera degli affidamenti didattici aggiuntivi e i contratti di insegnamento e tutorato; la redazione di un rapporto annuale di autovalutazione).

- *Dall'A.A. 2012/2013 partecipo alle attività del "Piano nazionale Lauree Scientifiche" (P.L.S.) del M.I.U.R. (per l'orientamento e la formazione degli insegnanti), classe di Matematica, presso il Dipartimento di Matematica di Bologna e sono stato responsabile di un laboratorio attivato per gli A.A. 2012/13, 2013/14, 2014/15 e 2015/16 dal titolo "L'Infinito in Matematica: alcune suggestioni".* Dall'A.A. 2005/06, per mezzo del P.L.S. (già Progetto Lauree Scientifiche, prima dell'A.A. 2010/11), il Corso di Studio in Matematica ha contribuito a contrastare un calo vocazionale (ben visibile a metà anni 2000) verso le scienze esatte: Matematica, Chimica e Fisica (spesso vissute dagli studenti come le cosiddette scienze "dure"). Si è così contribuito ad un rilancio della Laurea in Matematica (il cui numero di immatricolati, anche grazie ad altri fattori concomitanti, è considerevolmente aumentato), al fine anche di fare emergere le vere "vocazioni" verso la Matematica.

  Un'altra finalità del P.L.S. è di costituire un punto di raccordo tra Scuola e Università (dopo un annoso scollamento), per una più attiva formazione degli insegnanti, non solo nei contenuti ma anche nell'approccio didattico. Il responsabile di progetto infatti collabora collegialmente con gli insegnanti nell'elaborazione del progetto, mediante uno scambio di competenze, per la creazione del laboratorio che verrà in seguito portato in classe. Qui i tutor e i docenti supervisionano il lavoro, coinvolgendo attivamente gli studenti, che possono sperimentare un nuovo approccio allo studio della Matematica (anche facilitato dalla scelta di argomenti stimolanti), simile ai laboratori che tradizionalmente si pensano appannaggio delle scienze applicate. In tal modo, da un lato gli studenti toccano con mano la possibilità di imparare la Matematica in un modo alternativo, non passivo, e d'altra parte i docenti possono acquisire modalità didattiche laboratoriali, alternative alla lezione classica.

  Relativamente alle attività del P.L.S.: a marzo 2014 ho tenuto un Corso di Formazione per docenti di Scuola Secondaria legato alle attività del P.L.S. presso il Liceo Scientifico "A. Righi" di Bologna (12 ore di attività seminariale di formazione), finanziato dall'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia Romagna; nell'A.A. 2014/15 ho tenuto un corso di 10 ore presso il Liceo Classico "E. Torricelli" di Faenza su "Infinito in Matematica". Sempre relativamente al P.L.S., nell'A.A. 2015/16 ho tenuto un seminario dal titolo "L'Infinito in Matematica: suggestioni e misconcezioni", nell'ambito delle Conferenze MATHESIS, Bergamo (06/05/2016, Liceo Lussana).

Partecipazione Scientifica a Progetti di Ricerca/Convegni:

- Partecipante al progetto di ricerca Europeo "ITN-607643 - M.A.N.E.T. (Metric Analysis for Emergent Technologies)". Responsabile: Prof.ssa G. Citti (marzo 2014 - febbraio 2018).
- Membro del Progetto di Ricerca GNAMPA-INdAM 2016: "Existence and non-existence problems for global solutions to linear and non-linear PDEs in sub-Riemannian settings" (21/3/2016–2017). Coordinatore: dott.ssa A. Kogoj.
- Durante l'A.A. 2013/14 sono stato responsabile della proposta accettata e finanziata per un progetto di ricerca di tipo "Senior Fellowship" da parte di I.S.A. (Istituto di Studi Avanzati) di Bologna (dal 1-4-2014 al 30-6-2014), per un soggiorno di tre mesi del Prof. Jacob Katriel (Technion - Israel Institute of Technology).
- Membro del Comitato Organizzatore per il Convegno "Geometric methods in PDE's", INDAM Meeting on the occasion of the 70th birthday of Ermanno Lanconelli; Cortona 27–31/5/2013.
- Partecipante al Progetto R.F.O. 2013 (Ricerca Fondamentale Orientata). Coordinatore: Prof. B. Franchi.
- Coordinatore scientifico del Progetto G.N.A.M.P.A. 2012 (Gruppo Nazionale per l'Analisi matematica, la Probabilità e le Applicazioni), "Equazioni alle Derivate Parziali Lineari e non-Lineari in Contesti sub-Riemanniani" (durata 12 mesi – giugno 2012/maggio 2013).
- Partecipante al Progetto R.F.O. 2012 (Ricerca Fondamentale Orientata). Coordinatore: Prof. B. Franchi.
- Membro del Progetto A.G.A.P.E. (Analysis in Lie Groups and Applications to Perceptual Emergences). Coordinatore: Prof.ssa G. Citti. Progetto finanziato dall'Università di Bologna; marzo 2011 (durata 5 anni).
- Partecipante al Progetto R.F.O. 2011 (Ricerca Fondamentale Orientata). Coordinatore: Prof. B. Franchi.
- Partecipante al Progetto R.F.O. 2010 (Ricerca Fondamentale Orientata). Coordinatore: Prof. B. Franchi.
- Membro del Programma P.R.I.N. 2009 (Programmi di Ricerca Scientifica di Rilevante Interesse Nazionale). Titolo: "Equazioni di diffusione in ambiti sub-riemanniani e problemi geometrici associati". Coordinatore: Prof. I. Capuzzo Dolcetta, Responsabile scientifico: Prof. E. Lanconelli; Ateneo: Università degli Studi di Bologna, protocollo: 2009KNZ5FK 005.
- Partecipante ai Progetti R.F.O. 2007 e 2008 (Ricerca Fondamentale Orientata).
- Membro del Programma P.R.I.N. 2007 (Programmi di Ricerca Scientifica di Rilevante Interesse Nazionale). Titolo: "Equazioni subellittiche e problemi geometrici associati". Coordinatore: Prof. I. Capuzzo Dolcetta, Responsabile scientifico: Prof. E. Lanconelli; Ateneo: Università degli Studi di Bologna, protocollo: 2007WECYEA 003.
- Membro del Progetto G.A.L.A. (Geometrical Analysis in Lie groups and Applications). Coordinatore: Prof.ssa G. Citti. STREP EU-FP6; periodo: settembre 2006-2009.
- Responsabile del Progetto Giovani Ricercatori 2000. Titolo: "Disuguaglianza di Harnack e teoremi di esistenza per una classe di equazioni non lineari con forma caratteristica semidefinita positiva"; finanziato nel E.F. 2000.

- 12 ottobre - 3 dicembre 2000: Collaborazione all'organizzazione del convegno e mostra "*Matematica, Arte e Tecnologia*" (Bologna, 2000), patrocinato dall'U.M.I., Anno Mondiale della Matematica.

- Membro del Progetto Giovani Ricercatori 1999. Titolo: "Equazioni differenziali degeneri non ipoellittiche in finanza matematica". Responsabile: Prof. A. Pascucci; finanziato nel E.F. 1999.

- Membro del Progetto Giovani Ricercatori 1998. Titolo: "Moto per curvatura di Levi di ipersuperfici reali in $\mathbb{C}^n$". Responsabile del progetto: Prof.ssa A. Montanari; Finanziato nel E.F. 1998.

Seminari e Convegni:

(a) Seminari durante convegni (nazionali e internazionali):

- Invited speaker: talk "*The Harnack inequality and the fundamental solution for some classes of subelliptic operators*" (4 ottobre 2017), durante il Workshop "Analysis and PDE" (4–6 ottobre 2017, Leibniz Universität – Hannover).

- Invited speaker: talk "*Potential Theory results for a class of PDOs admitting a global fundamental solution*" (11 aprile 2016), durante il Convegno "Noncommutative Analysis and Partial Differential Equations" (11–15 aprile 2016, Imperial College London UK- London).

- Ho tenuto il talk dal titolo "*Maximum principle and Harnack inequality for hypoelliptic degenerate non-Hörmander operators*" (10 settembre 2014), presso l'Institut Henri Poincaré (IHP) di Parigi, per il ciclo di seminari "Séminaire de géométrie sous-Riemannienne", durante il Trimestre Tematico "Geometry, Analysis and Dynamics on Sub-Riemannian Manifolds".

- Nel periodo 07/09/2014–03/10/2014 ho partecipato al Trimestre Tematico "Geometry, Analysis and Dynamics on Sub-Riemannian Manifolds" (September 1st - December 12th, Paris, 2014) presso l'Institut Henri Poincaré (IHP) di Parigi.

- Ho tenuto la conferenza dal titolo "*Maximum principles and Harnack inequality for divergence-form hypoelliptic operators*" (25 giugno 2014), durante il Convegno "CR Geometry and PDEs - VI" (23–27 giugno 2014, Levico Terme, Trento).

- Ho tenuto la comunicazione dal titolo "*Alcune considerazioni e suggestioni sull'infinito in matematica*" (8 novembre 2014), durante il "XXVIII Convegno Nazionale Incontri con la Matematica. Parliamo tanto e spesso di Didattica della Matematica" (7–9 novembre 2014, Castel San Pietro Terme, Bologna).

- Ho tenuto la conferenza dal titolo "*L'Infinito in Matematica: Alcune suggestioni*", Convegno Scientifico sul P.L.S., Città della Scienza, Napoli - 12 e 13 Dicembre 2013.

- Ho tenuto il talk "*Some Results on Convex Functions on Carnot Groups: Lifting and Gauge-Functions*" (3 settembre 2008), durante il convegno "*Viscosity, metric and control theoretic methods in nonlinear PDE's: analysis, approximations, applications*", Roma, 3-5 settembre 2008, La Sapienza.

- Ho tenuto il talk "*Liouville-type theorems for sub-Laplacians on Carnot groups and applications*", durante il convegno "*Liouville Theorems in Riemannian and Sub-Riemannian settings*", Bologna, 23-24 novembre 2006, Dipartimento di Matematica.

(b) Seminari presso Dipartimenti (Bologna o altro Ateneo):

- Seminario: "*Gruppi di Carnot associati a campi vettoriali*", Seminario di Analisi Matematica, 15 gennaio 2002, Dipartimento di Matematica, Bologna.
- Seminario: "*Un teorema di Liouville non lineare sui semispazi dei gruppi di passo due*", Seminario di Analisi Matematica, 25 febbraio 2003, Dipartimento di Matematica, Bologna.
- Seminario: "*La formula di Taylor sui gruppi omogenei e applicazioni*", Seminario di Analisi Matematica, 6 marzo 2008, Dipartimento di Matematica, Bologna.
- Seminario: "*I teoremi di Campbell, Baker, Hausdorff e Dynkin. Storia, prove, problemi aperti*", Seminario di Analisi Matematica, 20 maggio 2010, Dipartimento di Matematica, Bologna.
- Talk: "*Subharmonic functions in sub-Riemannian settings: Characterizations of subharmonicity*", Pisa, 22 febbraio 2012, seminario per: "A one day workshop on Symmetry, Subharmonicity and Nonsmooth Vector Fields", Department of Mathematics, Pisa University, 2-22-2012.
- Seminario: "*Gruppi di Lie associati ad alcune classi di operatori di Hörmander*", Dipartimento di Matematica, Università di Padova (21 febbraio 2013), relativamente al "Seminario di Equazioni Differenziali e Analisi Complessa".
- Conferenza: "*Infinito in Matematica: Alcune suggestioni*", Dipartimento di Matematica, Università di Bologna (12 aprile 2013), conferenza divulgativa relativamente alla "Giornata Matematica per gli studenti Liceo Righi".
- Seminario: "*Algebras of complete Hörmander vector fields, and Lie-group construction*", Seminario di Analisi Matematica, 27 marzo 2014, Dipartimento di Matematica, Bologna.
- Seminario: "*Mean Value Formulas for degenerate-elliptic PDOs: applications to Potential Theory*", Seminari "Topics in Mathematics", 16 marzo 2016, Dipartimento di Matematica, Bologna.

Descrizione generale dell'attività scientifica

La mia attività di ricerca si inquadra nello studio degli operatori differenziali del secondo ordine con forma caratteristica semidefinita positiva, ma non ellittici, che rientrano nella classe di ipoellitticità introdotta da Hörmander. Fra tali operatori, particolarmente significativi sono i sub-Laplaciani $\mathcal{L}$ sui gruppi di Carnot $\mathbb{G}$, i quali approssimano localmente ogni operatore di Hörmander. A partire dai generatori di un gruppo stratificato $\mathbb{G}$, si possono modellare operatori differenziali più generali dei sub-Laplaciani (ad esempio, con coefficienti poco regolari e di tipo non variazionale), anch'essi oggetto della mia ricerca. Più di recente, la mia attenzione si è spostata verso operatori ellittico-degeneri (sempre in forma di divergenza, con coefficienti regolari o non), *ma non necessariamente di tipo Hörmander*, né necessariamente legati a strutture di gruppo di Lie.

La principale motivazione dei miei studi è dovuta al crescente interesse rivolto a questi operatori, almeno da tre decenni. Difatti, dapprima sporadicamente e poi in modo via via più frequente e sistematico, in contesti sia applicativi sia teorici, appaiono equazioni differenziali alle derivate parziali lineari e non lineari, in forma variazionale e non variazionale, che vengono usualmente (e forse impropriamente) chiamate di tipo ellittico-*degenere*. Questa terminologia, piuttosto generica, non appare del tutto appropriata per classificare queste equazioni: la forma caratteristica di esse è sì soltanto semidefinita, ma le strutture algebrico-geometriche soggiacenti sono spesso estremamente ricche, seppure non di tipo euclideo. Tali equazioni appaiono in vari contesti, anche molto diversi fra loro, quali ad esempio la teoria geometrica delle funzioni di più variabili complesse, la modellizzazione matematica dei materiali cristallini, i problemi di curvatura per le varietà di Cauchy-Riemann, la teoria dei sistemi di controllo, la geometria sub-Riemanniana, i processi di diffusione, la modellizzazione matematica della visione umana o computerizzata, la Finanza Matematica, ecc.

Tra le strutture algebrico-geometriche spesso associate a queste equazioni vi è in particolare quella dei gruppi stratificati (o come vengono recentemente chiamati, *gruppi di Carnot*), una sotto-classe dei gruppi di Lie nilpotenti la cui associata algebra di Lie ammette una stratificazione, ossia una decomposizione in *strati* del tipo $\mathfrak{g}_1 \oplus [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus [[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1], \mathfrak{g}_1] \oplus \cdots$. Tale decomposizione rende questi gruppi molto ricchi di proprietà e contemporaneamente relativamente semplici da studiare anche con metodi elementari e diretti, talvolta parzialmente in parallelo ai metodi del caso ellittico. Naturalmente associati ai gruppi di Carnot sono i relativi *sub-Laplaciani*, operatori differenziali del secondo ordine somma di quadrati di campi vettoriali che generano il primo strato $\mathfrak{g}_1$. L'usuale gruppo additivo su $\mathbb{R}^N$ ed il classico operatore di Laplace Δ sono certamente l'esempio più semplice di gruppo stratificato (commutativo) e di sub-Laplaciano (strettamente ellittico); il ben noto e molto studiato gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ e l'associato Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ costituiscono invece il primo esempio non banale di gruppo stratificato (non commutativo) e di sub-Laplaciano ellittico-"degenere".

Appare subito evidente dall'esempio del gruppo di Heisenberg che, sebbene i sub-Laplaciani condividano molte proprietà con gli operatori ellittici, non si può pensare che tutti i risultati classici valgano anche nel caso non euclideo, né tanto meno che i metodi e gli approcci dimostrativi siano gli stessi del caso ellittico non-degenere. La sfida dello studio degli operatori *sub-ellittici* è dunque quella di ottenere nuovi metodi e tecniche per lo studio delle molteplici tipicità e "patologie" che nascono nel caso non-ellittico, possibilmente nel modo più naturale possibile tenendo conto delle nuove strutture algebrico/geometriche e differenziali che nascono in questi contesti. Da questo punto di vista, l'idea -nata negli anni 80 del secolo scorso- di considerare delle distanze (dette 'di controllo' o 'di Carnot-Carathéodory') naturalmente associabili ad operatori del secondo ordine ellittico-degeneri si è rivelata una delle più fruttuose e potenti. In questa direzione si sono orientate le ricerche di molti studiosi di PDE della comunità scientifica mondiale.

Non meno fertile di risultati, tecniche e idee, è anche l'approccio della *Teoria del Potenziale* per lo studio di certe classi di operatori sub-ellittici, verso cui parte considerevole dei miei studi è rivolta da

15 anni. È ben noto infatti che i problemi chiave su cui poggia la Teoria del Potenziale sono i punti cruciali di interesse dello studioso di PDE: spazi di funzioni armoniche e subarmoniche; problema di Dirichlet; funzione di Green e Soluzione Fondamentale; Principio del Massimo; problemi di convergenza e disuguaglianze di Harnack; Teorema di Liouville; risolubilità in senso debole; teoria della rappresentazione delle funzioni subarmoniche; ecc...

La mia attività scientifica si articola dunque su alcuni nuclei tematici principali, strettamente correlati tra di loro:

1. Lo studio della struttura dei **gruppi di Carnot** e dei loro sub-Laplaciani $\mathcal{L}$.
2. Gli aspetti geometrico-differenziali, algebrici e le applicazioni alla teoria dei gruppi di Lie e alla teoria delle ODE e PDE del **Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin**.
3. La **Teoria del Potenziale** per $\mathcal{L}$ e per gli operatori in forma di divergenza su gruppi di Lie (non necessariamente stratificati) e -più in generale- per operatori in forma di divergenza su $\mathbb{R}^N$, non necessariamente associati a gruppi di Lie.
4. Lo studio dell'**operatore del calore** $\mathcal{H} = \mathcal{L} - \partial_t$ sui gruppi di Carnot e degli operatori in forma di non-divergenza modellabili su $\mathcal{L}$ e su $\mathcal{H}$ in strutture anche più generali dei gruppi di Carnot.

Nel seguito, viene fornita una breve descrizione delle mie ricerche in questi quattro nuclei tematici. Da pagina 28 si può invece trovare una più dettagliata esposizione dei miei contributi nelle singole pubblicazioni.

§.1. Nel corso della mia attività scientifica, ho avuto modo di studiare in modo sistematico la **struttura dei gruppi stratificati** e svariate delle proprietà dei sub-Laplaciani ad essi associati. Ad esempio, nei lavori [8, 9, 10, 12, 20, 27, 28, 29, 30, 34], unitamente a problemi specifici di Analisi, viene fornito parte del background algebrico-geometrico per lo studio approfondito dei gruppi stratificati. In particolare, vengono confrontate la definizione classica di gruppo di Carnot e una definizione operativa di gruppo *omogeneo* di Carnot, estremamente utile nel contesto analitico, ormai molto usata in letteratura. Alcuni argomenti che ho potuto approfondire, fondamentali anche per l'Analisi Matematica, sono perciò di carattere essenzialmente geometrico: ad esempio le algebre libere e nilpotenti, il procedimento di Lifting dei gruppi stratificati sui gruppi liberi, l'equivalenza dei sub-Laplaciani, la cosiddetta formula di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin, la costruzione di gruppi di Carnot a partire da campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$, le algebre e i gruppi di tipo H, la formula di Taylor per i gruppi omogenei, la nozione di convessità ecc.

Una delle classi di gruppi di Carnot che ho studiato più in dettaglio è quella dei gruppi di tipo H: dopo aver caratterizzato tali gruppi in modo sufficientemente esplicito, ho studiato un risultato di non-esistenza per un problema semilineare con esponente critico su tutti i semispazi (caratteristici e non) dei gruppi di tipo H (si vedano [7, 8]). Questo risultato migliora altri risultati in materia.

Più recentemente, ho studiato strutture più generali dei gruppi di Carnot: i gruppi omogenei, [21, (47)], e i gruppi non nilpotenti su $\mathbb{R}^N$ che si possono costruire a partire da certi campi vettoriali di tipo Hörmander (si vedano [24, 25, 26, 29, 39]). Per i primi gruppi abbiamo dimostrato l'analogo della formula di Taylor (con applicazioni per ottenere stime di Schauder ed applicazioni a problemi di reale analiticità) e l'esistenza della Soluzione Fondamentale; sulle seconde strutture si è provata l'esistenza e le buone proprietà della soluzione fondamentale, tra cui una proprietà di invarianza per traslazione a sinistra; inoltre abbiamo fornito condizioni necessarie e sufficienti affinché un operatore di Hörmander sia invariante a sinistra su un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, senza usare il Terzo Teorema di Lie.

§.2. Il citato background algebrico-geometrico per lo studio dei gruppi stratificati e dei sub-Laplaciani è stato ampiamente e approfonditamente trattato nella monografia [20], il cui scopo è appunto quello di fornire i dettagli analitici e geometrici per lo studio dei sub-Laplaciani e della Teoria del Potenziale ad essi associata. Recentemente, ho potuto approfondire lo studio di queste proprietà algebriche dei gruppi stratificati, partendo da uno dei più importanti e significativi risultati sui gruppi di Lie: la formula che porta i nomi di **Campbell, Baker, Hausdorff, Dynkin** (CBHD, nel seguito). È possibile affrontare lo studio di questa formula e fornirne dimostrazioni sia con metodi di Algebra (serie formali associate a certe algebre di tensori), sia di Analisi (di certe equazioni differenziali ordinarie), sia di Geometria Differenziale (dei gruppi di Lie). Una esposizione unitaria e self-contained di tutti questi differenti approcci appare nella monografia [28] (si veda anche [32]); alcune osservazioni collaterali di carattere puramente algebrico sono raccolte in [27], mentre la prova di una formula di tipo Campbell-Hausdorff relativamente ad un contesto di equazioni differenziali ordinarie è stato studiato in [26] (e migliorato in [39]; si veda anche [38]).

Come anticipato nel §1, notevole applicazione del Teorema di CBHD alla teoria delle equazioni alle derivate parziali è la possibilità di risolvere in modo costruttivo il problema di associare a un operatore differenziale P (modellato su campi vettoriali soddisfacenti opportune ipotesi) un gruppo di Lie che renda P invariante a sinistra. Operatori significativi di tipo Ornstein-Uhlenbeck e Kolmogorov-Fokker-Planck a cui questi risultati si applicano sono trattati in [24, 25, 26, 29, 31, 39].

Osserviamo esplicitamente che vi sono ancora problemi aperti sulla formula di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin, ossia il suo q-analogo che compare nella teoria della Meccanica Quantistica. Ho lavorato a tale problema con l'esperto mondiale in materia Jacob Katriel, e sono stati prodotti gli articoli [40, 46]. A partire da questi studi si potrebbe ottenere una nuova e inattesa prova del Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin che fa uso del q-Calcolo.

§.3. Una parte cospicua della mia ricerca è poi dedicata alla **Teoria del Potenziale** per i sub-Laplaciani $\mathcal{L}$ sui gruppi stratificati. A partire dalle buone proprietà della soluzione fondamentale Γ di $\mathcal{L}$ è possibile ricostruire gran parte della teoria classica: citiamo ad esempio teoremi di tipo Harnack-Liouville, caratterizzazione della subarmonicità rispetto a $\mathcal{L}$, formule di media per $\mathcal{L}$, teoremi di rappresentazione, formule di tipo Poisson&Jensen, capacità ed energia per $\mathcal{L}$, la formula di Pizzetti su gruppi di Heisenberg e su quelli di tipo H, ecc. Si vedano i lavori [2, 3, 5, 13, 15, 17, 22]. Come applicazioni significative di questa Teoria del Potenziale, si ottengono anche principi del massimo per $\mathcal{L}$ su aperti illimitati [3] (per altri tipi di principi del massimo si vedano anche [16, 43]), o proprietà fini di regolarità [15], o -ancora- lo studio del problema di Dirichlet associato ad $\mathcal{L}$ con dati al bordo di classe L^p e gli spazi di Hardy ad essi associati [17]. Un'altra applicazione della Teoria del potenziale sui gruppi di Carnot si ottiene nello studio dell'equazione Eikonale e dei teoremi di tipo Bôcher per la rimozione delle singolarità [19] o i teoremi di Liouville [1, 45].

Molto recentemente mi sono occupato di Teoria del Potenziale per operatori in forma di divergenza, ma non necessariamente in forma di somme di quadrati di Hörmander, né necessariamente invarianti a sinistra su gruppi di Lie. Si è provato che, in presenza di una soluzione fondamentale positiva (e con proprietà di annullamento all'infinito) si può dare una teoria completa delle associate funzioni subarmoniche e dei relativi operatori di media, [33, 35, 37]. Alcune delle caratterizzazioni della subarmonicità fornite nei citati lavori sono nuove anche nel caso classico del Laplaciano (si veda anche [36]).

Problema cruciale è poi quello della associata **disuguaglianza di Harnack**: oltre al lavoro [18], molto di recente abbiamo affrontato questo problema in [43], dove è stata ottenuta la disuguaglianza di Harnack (omogenea ma non-invariante) nel caso di operatori fortemente degeneri, ipoellittici ma non in forma di somme di quadrati di Hörmander; a tal fine è stato cruciale l'uso di alcuni risultati di Teoria del Controllo, che forniscono una proprietà di connettività in assenza della condizione del rango di Hörmander. In un contesto molto generale, abbiamo ottenuto in [48] una disuguaglianza di Harnack *invariante e non omogenea*, per gli spazi metrici di Carnot-Carathéodory nelle ipotesi di una proprietà doubling globale e di una disuguaglianza di Poincaré valida globalmente su ogni palla dello spazio CC.

§.**4.** Un'altra parte consistente della mia ricerca (dei primi cinque anni di attività scientifica) è stata dedicata all'**Operatore del Calore** $\mathcal{H} = \Delta_{\mathbb{G}} - \partial_t$ naturalmente associato ai gruppi di Carnot (si vedano [4, 6, 11, 14, 18]). Sebbene molte proprietà di $\mathcal{H}$ siano note in letteratura, è possibile fornire delle prove dirette dell'esistenza e delle buone proprietà della soluzione fondamentale Γ per $\mathcal{H}$: in particolare, abbiamo studiato in dettaglio le stime Gaussiane per Γ e per le sue derivate, il relativo problema di Cauchy e la disuguaglianza di Harnack, le caratterizzazione delle funzioni $\mathcal{H}$-caloriche non negative (teoremi di tipo Fatou e Kato). I metodi seguiti sono consistenti con l'approccio diretto con cui sono stati studiati i gruppi stratificati, in particolare facendo uso di elementi di Teoria del Potenziale. Questi risultati si applicano allo studio dei seguenti operatori "a coefficienti variabili" (che *non* possono essere posti in forma di divergenza)

$$\textstyle\sum_{i,j} a_{i,j}(x,t) X_i X_j - \partial_t, \qquad \sum_{i,j} a_{i,j}(x) X_i X_j$$

(essendo $\sum_i X_i^2$ un sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$ e $(a_{i,j})_{i,j}$ una matrice definita positiva ad entrate Hölderiane): tali operatori intervengono naturalmente come linearizzazioni di operatori totalmente non-lineari. In particolare, si è dimostrata la disuguaglianza di Harnack per tali operatori, [18], e l'esistenza delle soluzioni fondamentali per essi attraverso un'adeguata estensione del metodo della Parametrice di Levi, [11]: tale estensione è non banale e sfrutta opportune *stime Gaussiane uniformi* per gli operatori "congelati" $\sum_{i,j} a_{i,j}(x_0,t_0) X_i X_j - \partial_t$ (si veda [4]), per ottenere le quali è necessario sfruttare anche risultati di Lifting, [12], nonché l'equivalenza dei sub-Laplaciani sui gruppi liberi, [10]. Da questo punto di vista, lo studio degli operatori appena citati costituisce una *summa* di parte della mia attività di ricerca (nonché una rilevante motivazione per essa). Utile per lo studio di questi operatori è la nozione di convessità orizzontale (h-convessità) sui gruppi di Carnot, [23]. A tale proposito, abbiamo ottenuto alcuni risultati di tipo algebrico/geometrico-differenziale sulla h-convessità (di tipo lifting) e caratterizzazioni deboli della h-convessità, [34].

Descrizione delle singole pubblicazioni

Nel lavoro **[1]**, dopo aver ricavato delle formule integrali di media relative al sub-Laplaciano $\mathcal{L}$ su un gruppo di Carnot per la rappresentazione di funzioni regolari (simili alle classiche formule di media per il Laplaciano ordinario), viene provata una disuguaglianza che generalizza e riunisce i classici Teoremi di Liouville e Harnack per il caso dei sub-Laplaciani $\mathcal{L}$. Viene esibita inoltre una formula di rappresentazione per funzioni u per le quali $\mathcal{L}u$ è un polinomio. Come conseguenza, sono fornite alcune condizioni che assicurano che u è una funzione polinomiale ogniqualvolta $\mathcal{L}u$ è un polinomio. Per finire, si dà un'applicazione di questi risultati: se ψ è un'applicazione C^2 che commuta con $\mathcal{L}$, allora ciascuna delle sue componenti è un polinomio. Questi risultati sono ottenuti con metodi diretti a partire dalle citate formule di media.

Nel lavoro **[5]** vengono generalizzati al caso dei sub-Laplaciani $\mathcal{L}$ sui gruppi stratificati $\mathbb{G}$ alcuni rilevanti risultati della classica Teoria del Potenziale, con particolare riguardo allo studio delle funzioni *$\mathcal{L}$-subarmoniche*. Un ruolo rilevante rivestono i teoremi di caratterizzazione e di rappresentazione per funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche su $\mathbb{G}$: a tale proposito vengono fornite generalizzazioni del classico Teorema di Rappresentazione di Riesz e della Formula di Poisson&Jensen (poi ripresa in [13]). Viene inoltre sviluppata un'opportuna teoria di Nevanlinna per i sub-Laplaciani. Questi risultati rivestono un ruolo fondamentale ad esempio nella prova dei Principi del Massimo per $\mathcal{L}$ su aperti non limitati (si veda [3]).

Nel lavoro **[3]**, viene data un'applicazione significativa alla Teoria del Potenziale introdotta in [5]: viene infatti stabilito il Principio del Massimo su una vasta classe di aperti *non-limitati*. Negli ultimi anni, grande interesse è stato dato al Principio del Massimo su aperti non limitati per le soluzioni della disuguaglianza differenziale $\Delta u + c\,u \geq 0$ (ove Δ è il Laplaciano classico in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, e c è una funzione reale non positiva). Tale principio gioca un ruolo cruciale nella ricerca di proprietà di simmetria per le soluzioni delle equazioni di Poisson semilineari, mediante i ben noti metodi dei piani mobili o dello *sliding*. Nel caso classico, questo risultato viene di solito dimostrato mediante l'uso di opportune funzioni barriera su coni. In [3], si mostra come generalizzare al caso dei sub-Laplaciani tale risultato, senza ricorrere all'uso di funzioni barriera, ma solo grazie a opportuni argomenti di Teoria del Potenziale, già sviluppati nei lavori [1, 5] (in particolare, viene utilizzato il concetto di dominio *sottile all'infinito*). Questi Principi del Massimo su semispazi costituiscono altresì un punto di partenza nello studio del comportamento asintotico di funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche *non* limitate superiormente su $\mathbb{G}$ (teoremi di tipo Phragmén-Lindelöf). Analogamente al caso del Laplaciano classico, questi comportamenti asintotici sembrano avere importanti legami con problemi agli autovalori associati all'operatore $\mathcal{L}$ ristretto al bordo del disco unitario.

Nei lavori **[2]** e **[22]** fornisco generalizzazioni ed alcune applicazioni della cosiddetta *Formula di Pizzetti*: questa formula (legata alla Teoria del Potenziale per il Laplaciano) fornisce un'espressione della media integrale su un disco $D(x, R)$ di una funzione regolare come serie di potenze (in R) i cui coefficienti sono gli iterati del Laplaciano (valutati in x). Le generalizzazioni che ho ottenuto si riferiscono dapprima al Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^N}$ e poi ad un generico sub-Laplaciano "ortonormale" $\mathcal{L}$ sui gruppi di tipo H. Le formule ottenute presentano sorprendenti analogie con quella classica, accanto ad alcune novità dovute alle strutture "sub-ellittiche" di $\Delta_{\mathbb{H}^N}$ e $\mathcal{L}$: oltre alle potenze successive di $\Delta_{\mathbb{H}^N}$ o $\mathcal{L}$, compaiono le potenze della derivata "commutatoriale" ∂_t (o $\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_n}$, ove i t_j denotano le coordinate del secondo strato della stratificazione del gruppo di tipo H). Mediante la Formula di Pizzetti, si prova poi molto semplicemente che le uniche funzioni poliarmoniche non negative sono funzioni polinomiali.

Nei lavori [10,12] viene iniziato lo studio di una certa classe di operatori di tipo parabolico sui gruppi di Carnot. Alcuni di questi risultati sono di carattere essenzialmente geometrico, anche se l'approccio è analitico. In **[10]** si affronta il delicato problema dell'equivalenza a meno di diffeomorfismi fra i vari sub-Laplaciani su un gruppo $\mathbb{G}$, dando una risposta affermativa a tale equivalenza nel caso in cui l'algebra di $\mathbb{G}$ sia libera e presentando un controesempio nel caso contrario. Questo consente, nel caso libero, di rappresentare le soluzioni fondamentali dei sub-Laplaciani su $\mathbb{G}$ (e dei loro associati operatori del calore) in un modo "unitario", più precisamente in termine della soluzione fondamentale di un operatore modello. Ciò apre la strada per ottenere stime uniformi delle soluzioni fondamentali di tutti i sub-Laplaciani su $\mathbb{G}$.

Per potere trattare il caso di un gruppo $\mathbb{G}$ *non* libero, in **[12]** si introduce poi una tecnica di *Lifting*, ispirata ai famosi risultati di Rothschild&Stein, che permette di ricondursi al caso libero. In [12] viene inoltre data una dettagliata presentazione dei gruppi di Carnot (poi estesa nella monografia [20]) che si sforza di essere accessibile ai non specialisti. In particolare viene fornita una utile caratterizzazione di tali gruppi (mediante la nozione di gruppo di Carnot *omogeneo*). In queste problematiche giocano un ruolo fondamentale le proprietà delle mappe esponenziali sui gruppi di Lie ed in particolare la formula di Campbell-Baker-Hausdorff (si vedano anche [9, 20, 28]).

Facendo uso dei risultati provati in [10, 12], nel lavoro **[4]** si affronta il problema delle stime uniformi delle soluzioni fondamentali di una importante famiglia di sub-Laplaciani. Seguendo la linea dei precedenti lavori, viene fornita innanzitutto una prova diretta dell'esistenza e delle principali proprietà delle soluzioni fondamentali Γ per i citati operatori del calore $\mathcal{L} - \partial_t$ su $\mathbb{G}$. In particolare vengono dimostrate in modo diretto, con metodi di confronto, stime gaussiane di Γ. Si mostra poi che tali stime sono uniformi al variare dell'operatore in opportune classi, facendo uso dei risultati di [10, 12] ed attraverso metodi di saturazione. Infine si ottengono "stime hölderiane uniformi" per Γ e per le sue derivate.

Tali stime consentono, nel lavoro **[11]** (si veda anche **[6]**), di adattare il metodo della parametrice di Levi alla costruzione della soluzione fondamentale per un operatore a coefficienti hölderiani in forma di non-divergenza, "parabolico" rispetto ai campi vettoriali del sub-gradiente di $\mathbb{G}$. Con una integrazione nella variabile temporale, si costruisce poi una soluzione fondamentale locale per il corrispondente operatore di tipo "ellittico" (sempre rispetto ai suddetti campi). Questo è reso possibile da opportune stime per tempi lunghi, che risultano particolarmente delicate e vengono ottenute in [11] modificando i coefficienti dell'operatore fuori da un insieme compatto. Gli operatori studiati in [11] trovano applicazioni in svariati campi. In particolare intervengono nella linearizzazione di equazioni ellittiche degeneri totalmente nonlineari quali l'equazione della curvatura di Levi.

Nel lavoro **[18]** si continua lo studio degli operatori in forma di non-divergenza trattati in [11]. In particolare si provano stime puntuali dal basso per le loro soluzioni fondamentali, vengono studiate alcune proprietà delle relative funzioni di Green su domini cilindrici e finalmente si ottiene una disuguaglianza di Harnack invariante. Tale disuguaglianza viene ottenuta, a partire dai risultati in [4,10,12,11], seguendo alcune idee di Krylov&Safonov e di Fabes&Stroock insieme ad alcuni non banali argomenti di approssimazione. In particolare si sfrutta il fatto di poter ben approssimare arbitrari domini cilindrici con domini regolari per il problema di Dirichlet e di poter ottenere buone stime per le funzioni di Green su tali domini approssimanti.

Il lavoro **[14]** è in linea con la trattazione sistematica seguita in [4,10,12] e contiene fra l'altro alcuni raffinamenti di risultati ottenuti in [4], relativi al problema di Cauchy per operatori del calore su $\mathbb{G}$. In [14] viene infatti provata una formula di tipo Poisson&Stieltjes che consente di ottenere una caratterizzazione delle funzioni $\mathcal{L}$-caloriche non-negative attraverso opportune formule di rappresentazione. Vengono poi forniti dei teoremi di tipo Fatou e dei teoremi di unicità analoghi ai risultati provati da Kato per l'equazione del calore classica.

Di notevole interesse per lo studio di alcuni operatori non lineari è lo studio della convessità orizzontale (h-convessità) nei gruppi di Carnot. Ho provato alcuni risultati sulla h-convessità nel lavoro **[23]**. Infatti, sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo r e m generatori e di dimensione omogenea Q. Sia $\mathbb{F}_{m,r}$ il gruppo di Lie libero di passo r e m generatori. Sia inoltre $\pi : \mathbb{F}_{m,r} \to \mathbb{G}$ una mappa di lifting. In [23] viene dimostrato che ogni funzione h-convessa u on $\mathbb{G}$ si lifta ad una funzione h-convessa $u \circ \pi$ su $\mathbb{F}_{m,r}$

(rispetto ad un opportuno frame orizzontale su $\mathbb{F}_{m,r}$). Un altro scopo dello stesso lavoro è di esibire un esempio di sub-Laplaciano $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{m} X_j^2$ su di un gruppo di Carnot di passo due tale che la relativa funzione $\mathcal{L}$-gauge d (i.e., d^{2-Q} è la soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$) non sia h-convessa rispetto al frame orizzontale $\{X_1, \dots, X_m\}$. Questo fatto fornisce una risposta negativa ad una questione recentemente posta da Danielli, Garofalo e Nhieu. Ulteriori risultati sulla h-convessità sono infine forniti: ad esempio, esibisco una classe di mappe su $\mathbb{G}$ che preservano la convessità orizzontale.

Sullo studio della h-convessità siamo recentemente tornati nel lavoro **[30]**. Una nota caratterizzazione delle usuali funzioni convesse in $\mathbb{R}^N$ assicura che una funzione superiormente semicontinua u è convessa se e solo se $u(Ax)$ è subarmonica (rispetto al classico operatore di Laplace) per ogni matrice simmetrica definita-positiva A. In [30] viene dimostrato che un risultato analogo, *mutatis mutandis*, vale nel caso di gruppi di Carnot liberi $\mathbb{G}$, quando si considera la convessità in senso viscoso di Lu, Manfredi e Stroffolini. Nel caso subellittico dei gruppi di Carnot, le applicazioni lineari $x \mapsto Ax$ del caso Euclideo devono essere rimpiazzate da opportuni isomorfismi di gruppo $x \mapsto T_A(x)$, il cui differenziale preserva il primo strato della stratificazione di Lie($\mathbb{G}$). Nell'ulteriore lavoro, **[34]**, viene estesa la caratterizzazione di Dudley delle funzioni convesse: precisamente si dimostra che ogni distribuzione con matrice Hessiana orizzontale non negativa è associata ad una funzione h-convessa.

Nel lavoro **[8]** (si veda anche la nota preventiva **[7]** e il seminario **[53]**) vengono dimostrati alcuni teoremi di tipo Liouville nonlineari su gruppi stratificati di passo due e in particolare su gruppi di tipo H (una notevole sottoclasse di gruppi di Carnot introdotta da Kaplan). Tali risultati sono inquadrati in un progetto che mira, attraverso un'analisi di blow-up e tecniche variazionali, ad ottenere risultati di esistenza per problemi semilineari su gruppi di Carnot. I risultati in [8] migliorano un recente teorema di Garofalo&Vassilev, utilizzando tecniche differenti dalle loro, ma ispirate a quelle introdotte in alcuni lavori di Lanconelli&Uguzzoni e di Uguzzoni. Una delle maggiori difficoltà in [8] è dovuta alla non compattezza dell'insieme dei punti caratteristici dei domini considerati, che rende particolarmente delicata la costruzione di barriere esplicite. In [8] viene infine fornita una caratterizzazione dei gruppi di tipo H, utile in un contesto analitico. Essa in particolare consente di scrivere in modo "esplicito" l'espressione dei sub-Laplaciani su tali gruppi, permettendo fra l'altro la costruzione delle menzionate barriere.

Una parte notevole della mia attività scientifica è dedicata alla Teoria del Potenziale per operatori subellittici: oltre ai già citati [1, 3, 5], lo studio di Teoria del Potenziale viene proseguito in [13, 15, 16, 17, 19, 33, 35, 37]. Nel lavoro **[16]** si provano alcuni principi di massimo debole e di propagazione dei massimi, per soluzioni intrinseche di disuguaglianze differenziali strutturate su campi vettoriali. La principale novità rispetto ai risultati preesistenti, sta nella debole regolarità richiesta alla soluzione, che può non essere differenziabile in senso classico ma solo lungo le curve integrali dei campi vettoriali considerati. I risultati provati in [16] si applicano in particolare agli operatori in forma di non-divergenza sopra considerati e vengono utilizzati nei lavori [11,18].

Il lavoro **[13]** migliora un precendente risultato in [5]: viene infatti fornita la prova della cosiddetta *Formula di Poisson&Jensen* per un sub-Laplaciano nel caso di domini limitati arbitrari, senza alcuna ipotesi di regolarità rispetto all'associato problema di Dirichlet. A tal fine occorre sviluppare in dettaglio una teoria della *Capacità* e della *Polarità* rispetto a sub-Laplaciani. Tale teoria è fornita in [13] in modo essenzialmente self-contained, a partire dai risultati in [5] (si veda anche [20]).

In **[15]**, viene ulteriormente sviluppata la teoria della capacità per $\mathcal{L}$ già introdotta in [13] e, a partire da essa, si ottiene una teoria fine dell'*Energia* associata a $\mathcal{L}$. L'approccio seguito è nello spirito dei lavori [3, 5, 13], in cui si mostra come ripercorrere molti dei metodi classici di Teoria del Potenziale anche nel caso non euclideo dei gruppi stratificati. Come applicazione significativa della teoria dell'energia, viene esibita una prova semplice e diretta della *Quasi-Continuità* delle funzioni subarmoniche rispetto ad un sub-Laplaciano. Queste proprietà fini di regolarità sono di grande interesse nella letteratura recente.

Nel lavoro **[17]**, denotando con $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano su un gruppo stratificato $\mathbb{G}$, si studia il problema di Dirichlet per $\mathcal{L}$ con dati al bordo di classe L^p, su domini Ω che sono "contraibili" rispetto alle dilatazioni di $\mathbb{G}$. Una delle maggiori difficoltà che si è incontrata è la presenza di punti di bordo non regulari per l'usuale problema di Dirichlet relativo ad $\mathcal{L}$. Anche in questo articolo si segue un approccio potenzial-teoretico. I risultati principali vengono poi applicati allo studio di una opportuna nozione di "Spazi di Hardy" relativi ad $\mathcal{L}$.

Nel lavoro **[19]** (e nel seminario **[54]**), sono provati i seguenti risultati di Teoria del Potenziale per i sub-Laplaciani. Sia $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^m X_i^2$ un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ e si denoti con $\nabla_{\mathcal{L}} = (X_1, \dots, X_m)$ il gradiente intrinseco relativo a $\mathcal{L}$. Vengono analizzate alcune caratteristiche delle cosiddette funzioni $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$, i.e., le funzioni omogenee d tali che $\mathcal{L}(d^\gamma) = 0$ in $\mathbb{G}\setminus\{0\}$, per qualche $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vengono altresì considerate le relazioni che intercorrono tra le funzioni $\mathcal{L}$-gauge con: l'equazione $\mathcal{L}$-Eikonale $|\nabla_{\mathcal{L}} u| = 1$ in $\mathbb{G}$; le Formule di Media per le funzioni $\mathcal{L}$-armoniche; la soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$; i teoremi di tipo Bôcher di rimozione di singolarità per funzioni $\mathcal{L}$-armoniche non negative negli aperti "puntati" $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \{x_0\}$.

Strutture più generali dei gruppi di Carnot vengono considerate nei lavori seguenti: i gruppi omogenei (si veda [21]) e i gruppi non nilpotenti su $\mathbb{R}^N$ che si possono costruire a partire da certi campi vettoriali di tipo Hörmander (si vedano [24, 25, 29]). Nell'articolo **[21]** (e nel seminario **[55]**), ho dimostrato, sui gruppi omogenei (nel senso introdotto da Folland&Stein), l'analogo della formula di Taylor (con resto integrale) e la cosiddetta *disuguaglianza di Taylor*, migliorando un risultato di Folland del 1982. Ho inoltre fornito alcune applicazioni della formula di Taylor. Una prima applicazione riguarda la L-armonicità dei polinomi di Taylor di una funzione L-armonica, quando L è un operatore omogeneo invariante a sinistra su un gruppo omogeneo (questo risultato si applica per ottenere le stime di Schauder relative ad L). Un'altra applicazione riguarda invece risultati di reale analiticità per funzioni le cui derivate (nel senso dell'algebra di Lie) verificano alcune stime di crescita.

Motivato dallo studio sistematico dei gruppi stratificati e dei loro sub-Laplaciani, in **[9]** (si veda anche **[52]**) fornisco un metodo costruttivo ed esplicito per costruire gruppi di Carnot a partire da un set di campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$ verificanti semplicissime ipotesi strutturali (risultati ancora più generali sono provati in [24, 25, 29]). Vengono inoltre esibiti svariati esempi non banali. Tale metodo costruttivo è basato sull'uso delle mappe esponenziali naturalmente associate a questi set di campi vettoriali e ad un utilizzo accurato della famosa formula di Campbell-Baker-Hausdorff. Di tale formula, nel caso di campi vettoriali stratificati, viene anche fornita una prova (si veda anche [26]).

Nei lavori **[24, 25, 29]**, ritorno sul problema sollevato in [9]: più esplicitamente, se $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0$ è un operatore di Hörmander in $\mathbb{R}^N$, vengono fornite condizioni necessarie e sufficienti sugli X_j per l'esistenza di una struttura di gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$, *non necessariamente nilpotente*, tale che $\mathcal{L}$ è invariante a sinistra su $\mathbb{G}$. Il caso di campi vettoriali omogenei è investigato in [25], ove queste condizioni necessarie e sufficienti prendono una forma ancora più semplice. Inoltre viene investigata l'esistenza di una soluzione fondamentale globale Γ per $\mathcal{L}$, fornendo altresì risultati che assicurano alcune buone proprietà di invarianza per traslazione a sinistra di Γ. Esempi di operatori $\mathcal{L}$ ai quali i citati risultati si applicano comprendono quelli che sono chiamati, nella letteratura recente, operatori di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck, di tipo Mumford e di tipo Ornstein-Uhlenbeck. Abbiamo ottenuto recentemente condizioni necessarie e sufficienti minimali per rispondere alla questione di cui sopra, si veda **[39]**.

I sopra citati operatori di evoluzione sono investigati in dettaglio nel lavoro **[31]**. Qui vengono forniti esempi di notevole importanza applicativa di operatori ai quali si può associare una struttura invariante come descritto in [29]: questi esempi vengono principalmente dall'esponenziale di matrici reali o complesse, e altresì da ODE lineari a coefficienti costanti. Si mostra inoltre come combinare assieme questi gruppi per ottenere nuove strutture e operatori, anch'essi di interesse applicativo (operatori evolutivi di tipo Kolmogorov, operatori degeneri di tipo Ornstein-Uhlenbeck con coefficienti periodici dipendenti dal tempo.

La monografia **[20]** raccoglie ed approfondisce risultati introduttivi (ma anche di ricerca attuale) riguardanti lo studio dei gruppi di Carnot, con particolare cura nel fornire tutti quei risultati che vengono spesso bypassati in letteratura. Oltre ad una dettagliata introduzione sui gruppi omogenei e sui gruppi stratificati (contenente anche lo studio degli aspetti algebrici e geometrico-differenziali di tali strutture), vengono trattati anche aspetti analitici, quali lo studio della soluzione fondamentale dei sub-Laplaciani, le relative formule di media e la disuguaglianza di Harnack. Per mezzo di questi risultati e di alcuni di Teoria Astratta del Potenziale, viene poi sviluppata gran parte della Teoria del Potenziale per i sub-Laplaciani con particolare riguardo a: capacità, polarità, energia, lo studio del problema di Dirichlet nel senso di Perron-Wiener-Brelot, regolarità di punti di frontiera, formule di rappresentazione di tipo Riesz o Poisson-Jensen, il criterio di Wiener, singolarità isolate (teoremi di tipo Bôcher), lo studio della funzione di Green per aperti arbitrari, potenziali di misure, Principi del Massimo su aperti limitati e non, sottigliezza e topologia fine, ecc...

La monografia **[28]** (si veda anche l'estratto in **[56]**) esplora un risultato cruciale per comprendere background algebrico e geometrico-differenziale soggiacente ai gruppi di Lie (non necessariamente stratificati). Questa monografia è dedicata a uno dei più importanti e significativi risultati sui gruppi di Lie, cioè la formula che porta i nomi di Campbell, Baker, Hausdorff e Dynkin (che nel seguito ricorderemo brevemente come 'il Teorema di CBHD'). È possibile approcciare lo studio di questa formula e la sua dimostrazione sia con metodi di Algebra (strutture algebriche astratte, calcolo tensoriale, serie formali non commutative), sia di Analisi (teoria delle ODE), sia di Geometria Differenziale (gruppi di Lie e mappa esponenziale). Una esposizione unitaria e self-contained di tutti questi differenti approcci è contenuta nella monografia [28]. Sembra interessante osservare che uno dei primi a fornire una prova di un teorema di tipo CBHD per i cosiddetti gruppi continui di trasformazioni sia stato l'italiano Ernesto Pascal nel 1902 (prima, dunque, dello stesso Hausdorff): di questa indagine puramente storiografica mi sto occupando nell'imminente preprint **[i]**.

Di carattere storiografico è anche il lavoro **[32]**: qui viene fornita una esaustiva esposizione dei primi contributi al Teorema di CBHD, nel lasso temporale 1890–1950. Vengono riscoperti, investigati e confrontati i lavori di Schur, Poincaré, Pascal, oltre a quelli più noti di Campbell, Baker, Hausdorff, e Dynkin. Al fine di riportare pienamente alla luce i lavori originali, molti dettagli matematici vengono presentati. In particolare, viene riportata alla luce una serie di cinque articoli, ormai completamente dimenticati, di Ernesto Pascal (Lomb Ist Rend, 1901–1902), oggetto del citato imminente lavoro [i].

Di alcuni problemi squisitamente algebrici legati al Teorema di CBHD, ci siamo occupati nel lavoro **[27]**. Qui viene dimostrato che il classico teorema di Poincaré, Birkhoff, Witt (PBW, in breve) e quello di CBHD possono essere dimostrati l'uno tramite l'altro. L'uso del Teorema di PBW è uno degli ingredienti classici per affrontare la prova di CBHD (risalente al trattato di Bourbaki). Invece, nel dimostrare la dipendenza di PBW da CBHD, si possono usare alcune idee in un lavoro di P. Cartier del 1956, lasciate parzialmente non dimostrate e che in [27] vengono riprese in dettaglio. In particolare, viene chiarito il ruolo essenziale delle algebre di Lie libere nel dimostrare l'interdipendenza dei Teoremi di PBW e CBHD.

Sempre relativamente allo studio del Teorema di CBHD, nel lavoro **[26]** viene nuovamente investigato il problema di fornire condizioni sufficienti affinché l'operatore di Hörmander $\sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0$ sia invariante a sinistra su un gruppo di Lie. In [26] si descrive il modo "esplicito" di costruire tale gruppo (non necessariamente nilpotente né omogeneo): lo strumento essenziale è appunto una formula di tipo CBHD relativa ad un problema di EDO naturalmente associato al sistema di campi vettoriali $\{X_0, \dots, X_m\}$. In questo articolo si fornisce una prova diretta di questa formula nel contesto delle EDO (che sembrava mancare in letteratura), senza invocare nessun risultato di teoria dei gruppi di Lie, né tutto il "macchinario" algebrico astratto che c'è dietro la classica formula di CBHD. Vengono altresì forniti espliciti esempi di operatori di interesse applicativo a cui si applicano i nostri risultati. Sono state recentemente trovate condizioni necessarie e sufficienti per l'invarianza a sinistra di famiglie di campi vettoriali nel lavoro **[39]**, e nel lavoro **[38]** è stato fornito un dominio di convergenza della serie di CBHD nel contesto di algebre di Banach-Lie infinito-dimensionali. Osserviamo che vi sono ancora problemi aperti sulla formula di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin, tra cui ad esempio il suo q-analogo, che compare nella teoria della Meccanica Quantistica. Ho lavorato a tale problema con Jacob Katriel nei lavori **[40, 46]**, fornendo alcune risposte a problemi che erano rimasti aperti. A partire da questi studi si potrebbe ottenere una nuova e inattesa prova del Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin che fa uso del q-Calcolo.

Le mie investigazioni di Teoria del Potenziale sono continuate nei più recenti articoli [33, 35, 36], ove vengono studiati operatori molto più generali dei sub-Laplaciani sui gruppi stratificati. In **[35]**, viene fornita una piena caratterizzazione delle funzioni subarmoniche rispetto a operatori differenziali lineari del secondo ordine L con forma caratteristica non negativa, dotati di una soluzione fondamentale positiva Γ. Queste caratterizzazioni sono basate sull'uso di opportuni operatori di media integrali M_r sugli insiemi di livello di Γ. Vengono anche considerate caratterizzazioni asintotiche che estendono classici risultati di Blaschke, Privaloff, Radó, Beckenbach, Reade e Saks. Analizziamo anche la nozione di funzione subarmonica nel senso debole delle distribuzioni, e mostriamo come approssimare funzioni subarmoniche con funzioni subarmoniche C^∞. Gli operatori considerati in [35] comprendono come casi molto particolari i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot. Un risultato di Teoria del Potenziale viene anche trattato nel lavoro **[45]**, dove viene indagato il Teorema di Liouville per soluzioni in $L^p(\mathbb{G}, \mu)$ di $\mathcal{L}u \geq 0$, dove $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie non necessariamente stratificato, $\mathcal{L}$ è una somma di quadrati di campi che generano l'algebra di $\mathbb{G}$, e μ è una misura invariante a sinistra su $\mathbb{G}$.

Nell'articolo **[33]** si prosegue la strada tracciata in [35], considerando operatori C^∞-ipoellittici L come sopra. Vengono studiati i seguenti problemi: la positività del nucleo associato a M_r (proviamo che esso è positivo su un insieme aperto denso in $\mathbb{R}^N$); il ruolo di M_r nella risoluzione del problema di Dirichlet omogeneo associato a L, nel senso di Perron-Wiener-Brelot; l'esistenza di un "inverso" del teorema del valor medio caratterizzante le palle sub-Riemanniane definite come insiemi di sopralivello di Γ. Quest'ultimo risultato estende un precedente teorema di Kuran [Bull. London Math. Soc. 1972]. Come risultati collaterali proviamo in modo molto semplice il Principio del Massimo Forte per L e una formula di tipo Poisson&Jensen. Attualmente, grazie ai risultati in [33], abbiamo studiato le famiglie normali di funzioni L-armoniche ed abbiamo ottenuto una estensione di un noto teorema di Montel proveniente dalla teoria delle funzioni olomorfe; si veda **[37]**. In **[36]** viene fornita una caratterizzazione, per la classe di operatori in [35] (caratterizzazione nuova anche nel caso classico), delle funzioni L-subarmoniche u attraverso le proprietà di convessità delle medie $M_r(u)(x)$. Vengono poi estesi per gli operatori L i teoremi di rimozione di singolarità in [19].

Come già detto, problema di cruciale importanza, sia in Teoria del Potenziale sia nelle applicazioni alla teoria delle equazioni alle derivate parziali, è lo studio della *disuguaglianza di Harnack*: oltre ai lavori [1, 18], molto di recente abbiamo affrontato questo problema in **[43]**, dove è stata ottenuta la disuguaglianza di Harnack (omogenea ma non-invariante) nel caso di operatori fortemente degeneri, ipoellittici ma non necessariamente in forma di somme di quadrati di Hörmander; a tal fine è stato cruciale l'uso di risultati di Teoria del Controllo, che potessero fornire una proprietà di connettività in assenza della condizione del rango di Hörmander. In un contesto molto generale, abbiamo ottenuto in **[48]** una disuguaglianza di Harnack *invariante e non omogenea*, per gli spazi metrici di Carnot-Carathéodory nelle seguenti ipotesi: le validità di una proprietà di doubling globale e di una disuguaglianza di Poincaré, anch'essa valida globalmente su ogni palla dello spazio CC. Prima applicazione di questa disuguaglianza invariante sono ovviamente le relative stime di Schäuder (interne e al bordo). Risultato originale e più ambizioso sarà quello di ottenere anche un risultato di esistenza di una soluzione fondamentale globale (che quindi riflette le ipotesi globali di tipo doubling/Poincaré), passando per il principio del massimo, l'esistenza della funzione di Green su aperti limitati (e un processo di esaustione dello spazio euclideo mediante tali insiemi).

Pubblicazioni a carattere divulgativo:

Per finire, i lavori **[58, 59, 60]** ripercorrono parte dell'esperienza da me svolta presso il Dipartimento di Matematica nel 2000, Anno Mondiale della Matematica. Infatti, in occasione delle celebrazioni del "*World Mathematical Year 2000*" e di *Bologna 2000*, ho collaborato all'organizzazione dell'evento "Matematica Arte e Tecnologia: da Escher alla Computer Graphics", organizzato dal Dipartimento di Matematica di Bologna. Tale evento prevedeva un ciclo di convegni, una mostra di quadri e un ciclo di film riguardanti il connubio esistente tra Matematica e Arte.

L'intento dell'evento (peraltro pienamente atteso) era quello di attrarre l'interesse del grande pubblico verso il mondo della Matematica, prendendo spunto dalle suggestioni dell'arte pittorica, cinematografica e della computer graphics. In particolare, la mostra di un centinaio di quadri originali del famoso pittore olandese M. C. Escher, allestita presso la Biblioteca Universitaria di Bologna (assieme ad alcune opere di O. Reutersvärd e di L. Saffaro) ha ispirato il catalogo da me curato con C. Valentini, in cui si descrive il forte impatto che l'evento ha avuto sul pubblico, soprattutto di giovani, incuriositi dalle inaspettate interazioni tra matematica, arte e tecnologia. A partire dai contributi forniti dai diversi studiosi che hanno collaborato all'evento "Matematica Arte e Tecnologia", Springer Italia e Springer-Verlag hanno realizzato le raccolte citate in [59, 60], in cui sono intervenuto assieme con C. Valentini.

Nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche P.L.S. del M.I.U.R., ho tenuto alcune conferenze divulgative legate alla mia attività laboratoriale P.L.S. presso il Dipartimento di Matematica di Bologna: **[61, 62]**.

Siti Web:
Sito Web Docente presso il Portale dell'Ateneo di Bologna:

`http://www.unibo.it/docenti/andrea.bonfiglioli6`

Profilo Research Gate:

`https://www.researchgate.net/profile/Andrea_Bonfiglioli`

Riferimento MathSciNet (Mathematical Reviews):

`http://www.ams.org/mathscinet/search/author.html?mrauthid=690622`

E-mail:	andrea.bonfiglioli6@unibo.it
Cell:	3474566909
Tel:	051755649 (abitazione); 0512094498 (ufficio)
Fax:	0512094490 (dipartimentale)
ORCID:	orcid.org/0000-0003-0348-4453
Math. Reviews Author ID:	690622

Nome e Firma: **Data:** Bologna, 08/07/2019.

(Prof. Andrea Bonfiglioli)[3]

[3]Il sottoscritto esprime il proprio consenso affinché i dati personali contenuti nel presente curriculum possano essere trattati, nel rispetto della Legge 675/96, per gli adempimenti connessi ad eventuali valutazioni comparative. Dichiaro inoltre di consentire il trattamento dei dati personali e la pubblicazione dell'elenco dei titoli e delle pubblicazioni scientifiche, degli atti relativi alla procedura di Abilitazione, del giudizio collegiale e dei giudizi individuali espressi dalla competente Commissione nazionale, dei pareri pro veritate secondo quanto previsto dal bando candidati e nel rispetto del D.Lgs 196/2003.